ペル方程式の拡張

岩手県立一関第一高等学校理数科３年数学２班
阿部瑛斗　小原陽葵　廣田優祐

概要

方程式 $x^2 - Dy^2 = 1$（D は平方数でない自然数)はペル方程式と呼ばれており、D が平方数でない自然数の時はいくつかの性質が証明されている。私たちはそのうちのいくつかを D を有理数に拡張しても成り立つことを証明した。

ABSTRACT

An equation, $x^2 - Dy^2 = 1$ (when D is a natural number but it is not a square number) is called the Pell equation, and several properties are proved when D is a natural number that is not a square number. The Pell equation has several properties, some of which we have proved hold even when D is extended to rational numbers.

1　はじめに

ペル方程式とは，ディオファントス方程式の中の１種で，Dを平方数ではない自然数として，未知整数 x, yについて

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

という形のもので,Dが自然数の時一般的に以下の 3 つの性質がある。

Property1.　グラフで考えると漸近線は $y = \pm\sqrt{D}x$となるため，Dが平方数の時,漸近線が格子点を無限個通ってしまいペル方程式は(1,0)以外の格子点を通らない。

Property2.

$$\sqrt{D} = \frac{c\sqrt{D}+d}{a\sqrt{D}+b}$$

と連分数展開したとき，$x = a, y = b$ は最小解となる。

Property3.　任意のペル方程式の最小解を(x_1, y_1)とするとき,$\left(x_1 \pm y_1\sqrt{D}\right)^n = x_n \pm y_n\sqrt{D}$で表される$(x_n, y_n)$はそのペル方程式の解である。

これらの性質の property1, property3 について D を有理数に拡張した場合を考えた。

2　研究内容

Dを有理数に拡張した場合の property1 を証明する。

分母分子共に平方数かつ互いに素であるとき，

$$x^2 - \frac{q^2}{p^2}y^2 = 1 \text{（}p, q\text{は互いに素の自然数）}$$

とおくと,両辺にp^2を掛けて，

$$p^2x^2 - q^2y^2 = p^2$$

となる。ここで mod p^2 を考えてpとqは互いに素であるから

$y = pk$（kは自然数)とおける。ゆえに両辺をp^2で割って

$$x^2 - q^2k^2 = 1$$

となる。xkグラフにおいて漸近線が$k = \pm qx$となりこれは格子点を無限個通る。ここで$x = n$（n は 1 より大きな自然数)の時漸近線上の点のk座標をk_1,双曲線上の点のk座標をk_2とするとその差は

$$k_1 - k_2 = \frac{n}{q} - \frac{\sqrt{n^2-1}}{q} = \frac{1}{q}\frac{1}{n+\sqrt{n^2-1}} < 1$$

$$(\because \sqrt{n^2-1} > 1,\ q \geq 1)$$

となり、双曲線は自明解$(x=1,k=0)$を除き格子点を1つも通らない。したがって，

$$x^2-q^2k^2=1$$

を満たす自然数解(x,k)は自明解を除き存在しない。ゆえに，

$$x^2-\frac{q^2}{p^2}y^2=1$$

を満たす自然数解(x,y)は存在しない。

property3 について，(x_n,y_n)がDを有理数に拡張してもペル方程式の解となることを証明する。

まず$D=\frac{q}{p}$$(p,q$は互いに素$)$としてペル方程式

$$x^2-\tfrac{q}{p}y^2=1\cdots①$$

の最小解が$x=x_1,y=y_1$
であるとき，

$$\left(x_1\pm y_1\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^n=x_n\pm y_n\sqrt{\frac{q}{p}}\cdots②$$

となる(x_n,y_n)がこのペル方程式の解となることを数学的帰納法を用いて証明する。
この時，$x=x_n,y=y_n$とする
（ｉ）$n=1$のとき、自明である
（ⅱ）$n=k$の時成り立つと仮定すると

$$\left(x_1\pm y_1\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^k=x_k\pm y_k\sqrt{\frac{q}{p}}$$

$$x_k^2-\frac{q}{p}y_k^2=1$$

$n=k+1$のとき

$$(x_1+\sqrt{\frac{q}{p}}y_1)^n$$

$=(x_1x_k+\frac{q}{p}y_1y_k)+\sqrt{\frac{q}{p}}(x_ky_1+x_1y_k)$

ここで②と係数を比較して

$$\begin{cases}x_{k+1}=x_1x_k+\dfrac{q}{p}y_1y_k\\ y_{k+1}=x_ky_1+x_1y_k\end{cases}$$

であるから

$$x_{k+1}^2-\frac{q}{p}y_{k+1}^2$$

$=(x_1x_k+\frac{q}{p}y_1y_k)^2-\frac{q}{p}(x_ky_1+x_1y_k)^2$

=1

となり,①を満たすため証明された。

次にこの(x_n,y_n)が①のすべての解を満たしていることの証明を行う

$$x^2-\frac{3}{2}y^2=1\ \cdots(*)$$

$$\Leftrightarrow\left(x+y\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)\left(x-y\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)=1$$

最小解$(x,y)=(5,4)$を代入

$$\left(5+4\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)\left(5-4\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)=1\cdots③$$

両辺を2乗する。

$$\left(5+4\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)^2\left(5-4\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)^2=1$$

$$\therefore 49^2-\frac{3}{2}\times40^2=1$$

n乗も③の両辺をn乗することで帰納法から同様に証明できる。

次に$(*)$の任意の自然数解(u,v)をとる。

$\alpha=u+v\sqrt{\tfrac{3}{2}}$　とおけば,$v\geq4$であるから,

$$\alpha=\sqrt{1+\frac{3}{2}v^2}+v\sqrt{\frac{3}{2}}\geq5+4\sqrt{\frac{3}{2}}$$

である。
したがって,自然数 k を

$$\left(5+4\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)^k\leq\alpha<\left(5+4\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)^{k+1}\cdots①$$

となるように定められる。

$$\left(x_k+y_k\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\left(x_k-y_k\sqrt{\frac{3}{2}}\right)={x_k}^2-\frac{3}{2}{y_k}^2=1$$

より,

$$\frac{1}{\left(5+4\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^k}=\frac{1}{x_k+y_k\sqrt{\frac{3}{2}}}=x_k-y_k\sqrt{\frac{3}{2}}$$

である。したがって不等式①に

$$\frac{1}{\left(5+4\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^k}=x_k-y_k\sqrt{\frac{3}{2}}$$

を掛けて,

$$1\leq\frac{\alpha}{\left(5+4\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^k}<5+4\sqrt{\frac{3}{2}}$$

を得る。ここで

$$\beta=\frac{\alpha}{x_k+y_k\sqrt{\frac{3}{2}}}=\alpha\left(x_k-y_k\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=s+t\sqrt{\frac{3}{2}}$$

(s,tは自然数)とおけば

$$\beta=\left(u+v\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\left(x_k-y_k\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$$

$$=\left(ux_k-\frac{3}{2}vy_k\right)+(vx_k-uy_k)\sqrt{\frac{3}{2}}$$

係数を比較して,

$$s=ux_k-\frac{3}{2}vy_k,\ t=vx_k-uy_k$$

ここでy_kは$(*)$を満たすので偶数であることは保証される。

$$s^2-\frac{3}{2}t^2$$

$$=\left(ux_k-\frac{3}{2}vy_k\right)^2-\frac{3}{2}(vx_k-uy_k)^2$$

$$=\left(u^2-\frac{3}{2}v^2\right){x_k}^2-\frac{3}{2}\left(u^2-\frac{3}{2}v^2\right){y_k}^2$$

$$=1\cdots②$$

したがって

$$\left(s+t\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\left(s-t\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=1$$

である。

$1\leq s+t\sqrt{\frac{3}{2}}$ であるから，$s+t\sqrt{\frac{3}{2}}$の逆数

$s-t\sqrt{\frac{3}{2}}$は 1 以下の正の実数である。

$1\leq s+t\sqrt{\frac{3}{2}}<5+4\sqrt{\frac{3}{2}}$ ，$0<s-t\sqrt{\frac{3}{2}}\leq1$

より

$$1<2s\leq6+4\sqrt{\frac{3}{2}}\Leftrightarrow\frac{1}{2}<s\leq3+2\sqrt{\frac{3}{2}}$$

これからsは 1,2,3,4,5 である。②を満たすのは$(s,t)=(1,0)$のみで

$$\beta=1$$

したがって，$\alpha=x_k+y_k\sqrt{\frac{3}{2}},u=x_k,v=y_k$

となる。

3　今後の展望

今回の研究では property1 と property 3 について D を有理数に拡張した時の証明を行えた。property 2 についての証明は未だできていないが，数値を代入して反例は見つけられなかった。今後は property 2 についての理解，議論を深め, property 2 についての議論も行っていきたい。

参考文献

https://www.geisya.or.jp/~mwm48961/kou3/diophantine2.htm

https://youtu.be/5GHXkr7Sn_k

平方根の連分数とペル方程式　有澤健治(著)