楕円版トロコイドの考察
～有名問題の拡張～

岩手県立一関第一高等学校理数科３年数学１班
斎藤佑樹　村上塔哉　鳥畑遥

要約
従来、トロコイドやサイクロイドなどの軌跡は円を用いて考察されてきた。そこで私たちは、楕円を滑らずに転がしたときに楕円上のある定点がどのような軌跡を描くかについて疑問を感じたため考察をした。
〈キーワード〉　楕円　トロコイド　軌跡

ABSTRACT
Traditionally, trajectories such as trochoid and cycloid have been considered using circles. We therefore considered the question of what kind of trajectory a certain fixed point on an ellipse would have when the ellipse is rolled without sliding.
〈Keyword〉　Ellipse, trochoid, locus

１　はじめに
新課程数学 C における有名問題として、一つの円が直線上を滑ることなく転がるとき、中心を通る直線上の定点の軌跡を求めよ、というものがある。この軌跡として得られる曲線が、すなわちトロコイドである。このトロコイドの中でも、中心を通る直線上の定点が円周上の点であるときこの曲線はサイクロイドと呼ばれ、最速降下性、等時性といった力学的に興味深い性質を持つ。本研究では、トロコイドにおいて直線上を転がす対象を円から楕円に一般化した、いわば”楕円版トロコイド”の媒介変数表示や、その性質について探求した。

２　研究方法
(1) 研究対象
楕円版トロコイド
(現行課程における数学 C を中心とした、高校数学全般の分野)

(2) 観察・実験・調査の手順
実験等は行っていない。
(3) データ処理の方法
GeoGebra などのソフトを用いる。

３　結果
楕円が x 軸上を滑らずに正の方向に回転していくとき,楕円の中心が描く軌跡について言及しておく。これは有名問題であるとして、長軸と短軸がそれぞれ x 軸,y 軸に平行でその交点が原点である楕円を考える。楕円周上のある点における接線を考え、その接点が原点に重なるように平行移動し楕円が y>0 の部分に存在する方向に回転させ、周の長さだけ x 軸正方向に移動することで得られる。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L(t) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c - a\cos\alpha \\ d - b - b\sin\alpha \end{pmatrix}$$

ここで、tは媒介変数、a, bは楕円を決定する定数、(c, d)は$t = 0$のときの点、$\alpha, L(t)$は

$$\alpha = \tan^{-1}\left(-\frac{b}{a\tan t}\right)$$
$$L(t) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}\, d\theta$$

により定められるtの関数。
さて、ここでこの曲線を微小分割し、微小円弧の連続であるとみなす。したがってある微小区間dtにおいて、円の半径を定義することができる。なおこの関数は、全実数で連続であるものとし一周期において微分可能であるものとする。このとき、ある t に対して曲率半径 R は次のように定義される。

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|x'y'' - y'x''|}$$

なお$s' = \frac{ds}{dt}$ であること一応断っておく。さらに$x' = 0$ に対しては、この式では定義で

きない。すなわち、一周期における x の区間のちょうど中間の地点で R は定義されない。これに注意して、R を t の関数$R(t)$とみる。ある物体が、y(t)が減少する区間において運動していると考える。このときこの物体の接点と x 軸負の向きがなす角を$\alpha(t)$とし、力学的エネルギー保存則から導かれる速度を$v(t)$とすれば、運動方程式から

$$a(t) = \frac{v(t)^2}{R(t)} \sin \alpha(t)$$

とかける。ただしこれが成り立つためには物体が円運動を続けていることが前提であり、その条件は

$$g > \frac{(v(t))^2}{r(t) \cos \theta(t)}$$

次に E:$\frac{y^2}{a^2} + \frac{(x-1+b)^2}{b^2} = 1$ で定義する。このとき、E に内接する円 O: $x^2 + y^2 = 1$ を考えると、ある中心角θで楕円が内接、すなわち接点が$(\cos\theta, \sin\theta)$であるとき、その点における円の接線の傾きを$\tan\theta$’とする。なお、以降θ回転する行列をf_θで書くものとする。

まず楕円の中心の軌道を考える際に、その接線を x 軸に重ねることで、楕円の初期接点から移動後の点までの周長はθと書くことができ、θ=L(t)を満たす, t をθ”とする。

したがって、前述の楕円の中心の軌道を表すベクトルを$\vec{z}$と書くことにし、楕円の周長を大きさとする x 軸正の向きのベクトルを$\vec{v}_{\theta''}$とすると$\vec{z} - \vec{v}_{\theta''}$は接地点から楕円の中心に向かうベクトルとなるのでこれを 0 における内接点の傾きと x 軸の正の向きとなす角をθ’と定義しているので, 求める中心の軌道を$\underset{r}{\rightarrow}$と書くことにすれば

$$\underset{r}{\rightarrow} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} + f_{\theta'-\pi} \left(\underset{z}{\rightarrow} - \underset{v_{\theta''}}{\longrightarrow} \right)$$

であることがわかる。

4 考察

ここまでの計算より,おそらく一般的に解くことが厳しいと考えられる式が多々現れた。特に楕円の周長をはじめとした積分が絡んだ方程式は,コンピューターを用いることが必須だろう。変数も、たがいに関係を持つとはいえ 3 つ登場している。しかし、計算の煩雑さを考慮せずある程度関係式を用いれば、一応楕円版トロコイドは求めることができるだろう。

5 結論・今後の展望

ある 2 点を通る、平面上の曲線 C に束縛されて、滑らないように回転する楕円板の加速度について微分方程式を立て、最速降下曲線を求めそれが今回求めた楕円版トロコイドと一致するかどうかを確かめることにより楕円版トロコイドの物理的特性を調べることができる。

謝辞

この研究を行うにあたり、ご指導くださった小山寛先生、吉川彰彦先生並びに全ての方に御礼申し上げます。