

1年数学 探究の時間 VIII 立方体から 正十二面体を切り出す

2020年10月

1 はじめに

前回は、「正多面体はドンダケ〜?」ということで、正多面体はどれだけの種類があるかを考えました。平面上で「正多角形」といえば、正三角形、正四角形、正五角形、正六角形、正七角形、…と、いくらでもありましたが、面がすべて合同な正多角形で、一つの頂点には同じ数だけ集まっているような多面体・・・「正多面体」というのは、ごく限られたものしかないということがわかりました。



ところで、この木の多面体模型ですが、これらは立方体の木材からのこぎりで切り出されたものなのです。木製の多面体というのは手触りも暖かくていいものですね。

さて、今日の課題はこれです。

立方体から正十二面体を切り出すにはどうしたらよいでしょうか？

2 正十二面体を手にとって・・・

まずみなさんに、この木製の正十二面体を配りましょうね。立方体の木材からのこぎりで切り出したものです。「最初はゴール」ということで、できあがりをよく見てみましょう。



写真1：正十二面体を見る

いろいろな角度から正十二面体を見ていますね。



写真2：正十二面体1



写真3：正十二面体2



写真4：正十二面体3



写真5：正十二面体4

何か気がついたでしょうか？

生徒A：全然わかんない！

生徒B：どうしたらいいの？

生徒C：最初はゴールだからね、正十二面体をよく見るわけだけどね。

3 もしもボックス

さて、漠然と眺めていただけでは何にも気づきませんね。前回も「焦点を絞って見る」ことにして始めて気がつくことができました。どこを見るかを決めるためには「もしもボックス」が役に立ちます。

今の場合だと、「もしも立方体の中に正十二面体が埋まっているとすると」と考えることです。

立方体は正十二面体をつつむケースになっているとしましょう。きっとこのケースは正十二面体がぴったりと入っているはずですね。

生徒A：立方体の中に、正十二面体がぴったりと入っていると考えるのね。

生徒B：この正十二面体を机に置くと、正十二面体の一番上にくる面が、机と平行になっているんだよね。

生徒C：そうそう。だから、あとは側面をうまく切ればいいんだと思ってみてるんだけどね。

生徒D：その側面の切り方が問題だな・・・

生徒A：正十二面体になるように適当に斜めに切ろうかなんてはなしてたのよ。

生徒D：「立方体から」切り出すんだから、立方体も見なくちゃダメじゃね？

今回は切り出し方を突き止めたら、みんなで実際に切りだしてもらおうと思っています。木材をのこぎりで切り出すのは大変なので、発泡スチロールの立方体から電熱線で切り出そうと思います。

実際に使う発泡スチロールの立方体を見てみましょう。

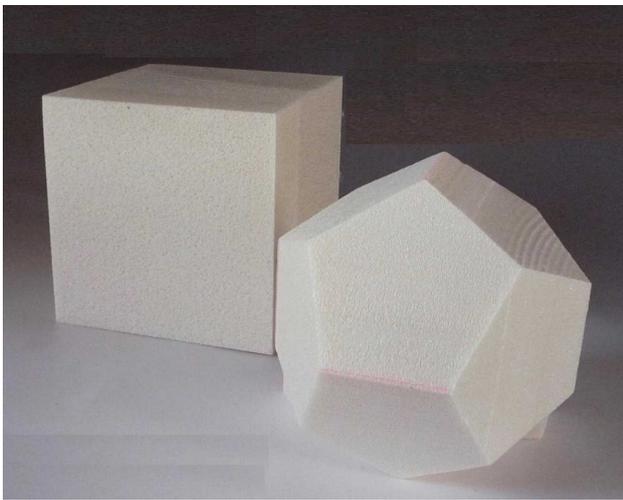


写真6：立方体から切り出した正十二面体



写真7：立方体1



写真8：立方体2



写真9：立方体3



写真10：立方体4

4 「見る」こと

前回も小学校の教科書を振り返りました。立体を見るときの注意です。

教科書にのっている「頂点・辺・面に注目する」ことをやってみたら多面体の多様性について近づくことができました。さらに「平行・垂直」という関係に注意してみるとということも書いていましたね。

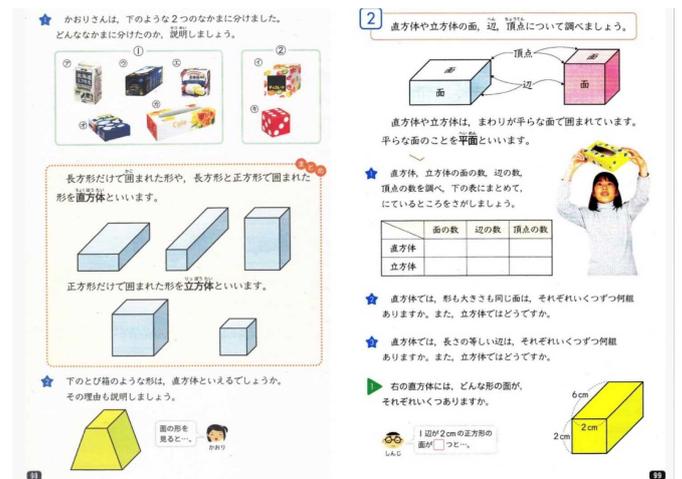


写真9：頂点・辺・面に着目する



写真10：平行・垂直に着目する

さて、それでは本題に入りましょうか。

4.1 もしも立方体の中に 正十二面体が入っているとしたら

正十二面体が立方体のケースのなかにすっぽりと入っているようすを想像してみましょう。

余計な遊びはないようにした方が切断しやすいでしょうから、きっと正十二面体は立方体のケースに接するように入まっているのでしょう。

正十二面体の一つの面を机の上に置くと、上の面は机の面と平行になっていて、立方体の床の面と天井の面に正十二面体の正五角形が含まれていると、皆さんは考えたわけですか。でもその後の側面の10の面の切り方で困っていたわけですか。

4.2 セカンドオピニオン

一つのことを考えて困ってしまったときに考えなければならぬのは「セカンドオピニオン」でした。

皆さんが考えたのは、正十二面体の「面」が立方体の「面」のなかにすっぽりと入った状態を考えたのですが、他のことは考えられませんか？

小学校の教科書では立体の見方として、「頂点、辺、面に着目して見る」ということがありましたね。そして、皆さんは「面」に着目して困ってしまったのですから、他のものに着目することも考えなければなりません。

生徒 A：「正多面体ってドンダケ〜？」のときには、頂点に集まる面に着目することによって道が開けたなあ・・・。

生徒 B：「面」でだめなら、「頂点」か「辺」だな・・・

生徒 C：頂点ってさあ、正五角形の頂点になっちゃうんでしょ。

生徒 D：うむ。立方体はきれいなかたちだから、立方体の頂点の中から正五角形なんかできないし・・・

生徒 A：そうかあ・・・立方体から考えるってすごい。

生徒 B：「頂点」が望み薄なら残るは「辺」か？

正十二面体をすっぽり包んでいる立方体のケース、正十二面体と立方体と両方をじっくりと見てみましょう。

そもそも立方体は、向かい合う面が平行で、隣同士の面は垂直になっています、正十二面体の面との関係とは全然違う感じです。生徒 C：正十二面体の面が立方体の面からとれると考えるとうまくいかないんだから、正十二面体の辺が立方体の面上にのっていると考えたらどうなる？

生徒 D：立方体の向かい合う面は平行だから、そういう辺があれば、きっと平行だね。

生徒 A：正十二面体の辺の中に、平行なペアがあるの？

生徒 B：そういわれてよく見るとあるわ・・・

置き方変えればよくわかるよ。



写真9：平行な辺 1



写真10：平行な辺 2

生徒 C：本当だ。上と下の辺が水平で平行になっているし、左右に床に垂直な平行なペアがある。

生徒 D：前後にもあるし・・・

平行な辺の3ペアって、お互いに垂直だね。



写真11：平行な辺 1

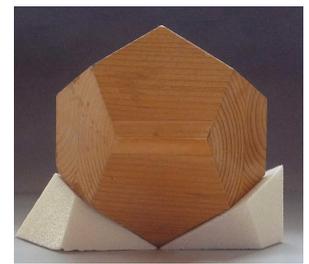


写真12：平行な辺 2

この平行な2辺は、立方体の向かい合う平行な面上にあると考えることができますね。さらにこの2辺に垂直な方向の平行な辺は、立方体の別の平行な二つの面上にあると考えられます。

すると、このような絵が見えてきます。



写真13：こんなふうには埋まっている 1



写真14：こんなふうには埋まっている 2

生徒 A：なるほど～・・・

生徒 B：こういう風に立方体の中に埋まっていたのね。

5 切り方を考える

立方体の中に埋まっている正十二面体を切り出す方法を考えましょう。

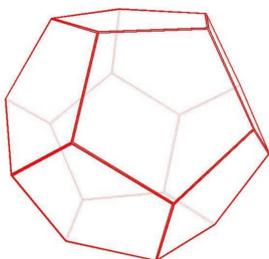


図1：はじめに見た正十二面体

正十二面体をこのように見ていた時は見えてこなかったのですが、・・・

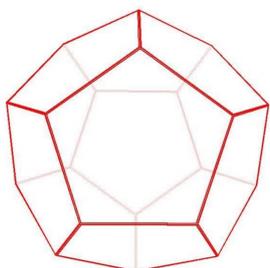


図2：平行な辺を探すと

こういう風に見ると平行な辺の組が3つ見つかります。

天井と床に、前後に走る平行な2辺が見えます。
側面に床に、垂直に走る平行な2辺が見えます。
全面と後ろ面に、水平に走る平行な2辺が見えます。

この平行な辺が、立方体の向かい合う平行な面にのるように、そして、3組の2辺が、立方体の向かい合う3組の平面に、それぞれのるように、立方体の中に埋まっているように見えませんか？

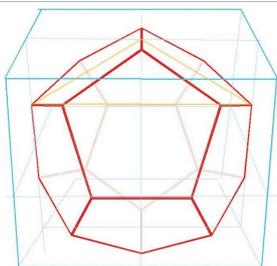


図3：立方体中の正十二面体

正十二面体は、このように立方体の中に埋まっていた。

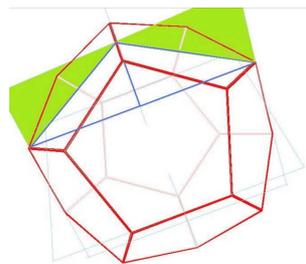


図4：切り取る部分

とりあえず、ここの部分を削り取ることを考えましょう

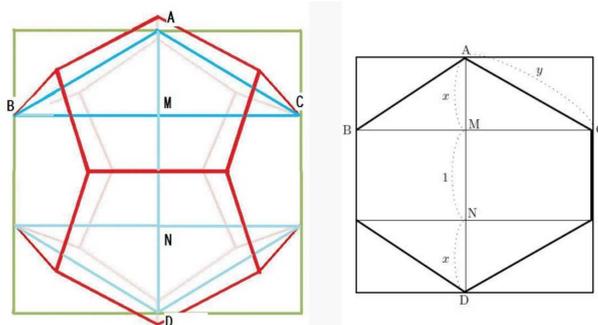


図5：切り取る部分

真横から見ると、こんな風に両端の直角三角形を切り落としたいところ。

掘り起こされる正十二面体の左右にある上下に走る平行な2辺に注目すると、この2辺を通る平面で立方体を切断したときの切断面が右に示してある。正十二面体の面となる正五角形の一辺の長さを1とすると、切断面中の線分MNがこの辺の長さに等しくなる。

切断面中にできる直角三角形AMCの各辺の長さを求めることができれば、切断の仕方がわかる。

求める直角三角形の3辺の中で、

$$x = AM$$

$$y = AC$$

としよう。この6角形は正方形の中にあるのだから、残りの辺MCについては

$$MC = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}(x + 1 + x)$$

となっているので

$$MC = x + \frac{1}{2}$$

として求めることができる。



図 6：辺 AC を含む三角形 1

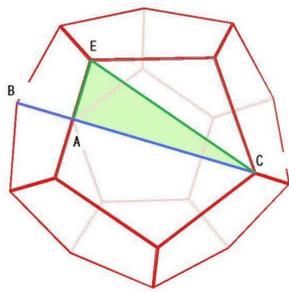


図 7：辺 AC を含む三角形 2

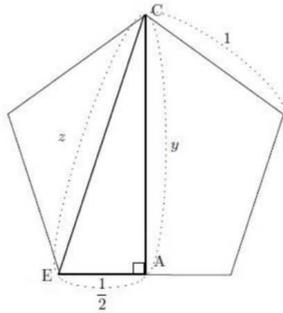


図 8：辺 AC を含む三角形 3

1 辺の長さ 1 の正五角形のなかの左図の直角三角形 ACE 中の辺 AC を求めることになりますが、ここで、 $z = CE$ は正五角形の対角線となるのでなんとか求めることができそうです。

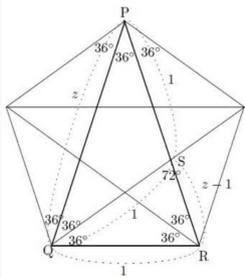


図 9：正五角形

$\triangle PQR \sim \triangle RRS$ です。

相似な三角形の対応する辺の比は等しいので

$$PQ : QR = QR : RS$$

すなわち

$$z : 1 = 1 : (z - 1)$$

です。したがって、

$$z(z - 1) = 1 \times 1 \quad \text{ゆえに} \quad z^2 - z - 1 = 0$$

この 2 次方程式は、解の公式を用いて

$$z = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2}$$

ですから

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

このうち、 $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$ ですから、辺の長さ z としては不適です。

ゆえに
$$z = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

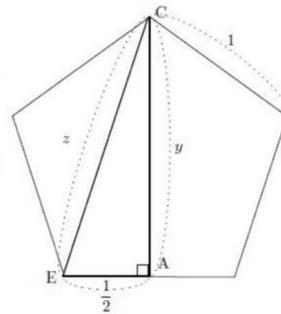


図 10： $\triangle CEA$

$\triangle CEA$ において、三平方の定理より

$$z^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2$$

なので

$$y^2 = z^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

これに $z = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ を代入すると

$$\begin{aligned} y^2 &= \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{2 + \sqrt{5}}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{5 + 2\sqrt{5}}{4} \end{aligned}$$

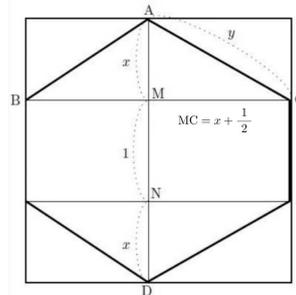


図 11： $\triangle AMC$

$\triangle AMC$ において、三平方の定理より

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + x^2 = y^2$$

なので

$$\begin{aligned} 2x^2 + x + \frac{1}{4} &= \frac{5 + 2\sqrt{5}}{4} \\ 2x^2 + x - \frac{4 + 2\sqrt{5}}{4} &= 0 \end{aligned}$$

この 2 次方程式も解の公式を使って

$$\begin{aligned} x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 2(4 + 2\sqrt{5})}}{2 \times 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9 + 2\sqrt{20}}}{4} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{(\sqrt{4} + \sqrt{5})^2}}{4} = \frac{-1 \pm (2 + \sqrt{5})}{4} \end{aligned}$$

x は辺の長さなので $x > 0$ であるから

$$x = \frac{-1 + (2 + \sqrt{5})}{4} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

したがって、切り取られる直角三角形は次のような形をしている。

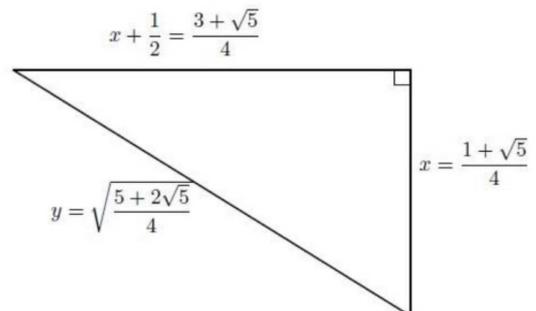


図 12：切り取られる部分

ここで求めた x は、掘り起こされる正十二面体の 1 辺の長さが 1 としたときの値でした。

ここでは、1 辺が 10 cm の発泡スチロールの立方体をも使いますから、辺の長さが $\frac{3+\sqrt{5}}{4}$ のところが 5cm になるようにしたいと思います。

$$\begin{aligned} & \frac{1+\sqrt{5}}{4} \times \frac{4}{3+\sqrt{5}} \times 5 \\ &= \frac{1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} \times 5 = \frac{(1+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{9-5} \times 5 \\ &= \frac{3-5+2\sqrt{5}}{4} \times 5 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \times 5 \end{aligned}$$

以上の計算により、1 辺 10cm の直方体から、次のように切り取ることによって、正十二面体の隣り合う 2 面のなす角を作ることができることがわかりました。

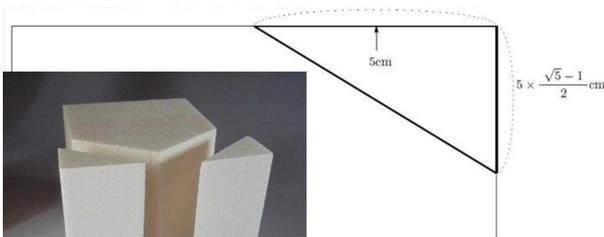


図 13：1 辺 10cm の直方体から

- 生徒 A：けっこう大変な計算だったけど、なんとかできたな。
- 生徒 B：二重根号が外れた時はちょっとうれしかった。
- 生徒 C：だけどもさあ・・・これ隣どうしの面の角度をつくっただけじゃん。
- 生徒 D：これで正十二面体できるのか？
- 生徒 A：まあ、立方体の 6 つの面のそれぞれをこうやって 2 回切るから、12 の面ができるわな。
- 生徒 B：だけど、これから本当に正五角形ができるのか？
- 生徒 C：そうだよな・・・
- 生徒 D：だけど、考えるのも疲れたな今回は。

6 実際に切断してみよう

とりあえず、立方体の 6 つの面をこのように 2 回ずつ切断したときに、どういうものになるのかやってみるしかないのではないのでしょうか？

ここでは、1 辺の長さが 10cm の発泡スチロール製の立方体を、電熱線を使って切ってみましょう。きれいに切断するために、電熱線を床に垂直な方向に固定して、立方体を平行に移動させるという方法をとります。

上で計算したように切るために、立方体を次の図のように固定することを考えます。

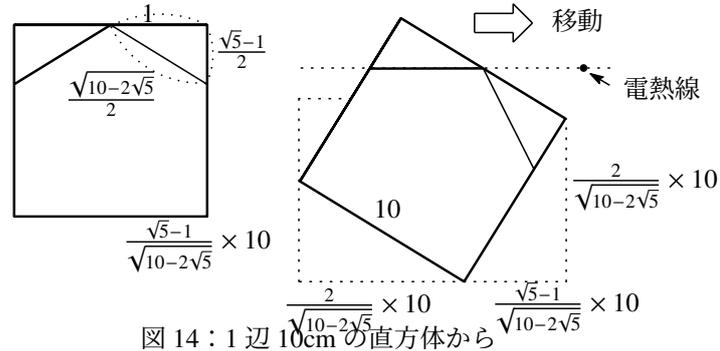


図 14：1 辺 10cm の直方体から

まず、発泡スチロールの立方体を図のように斜めに固定して平行に移動するような台を作ります。

発泡スチロールの立方体には、対面は平行に、隣り合う面は互いに垂直になるように、中央に直線を引いておき、切断のためのガイドとします。

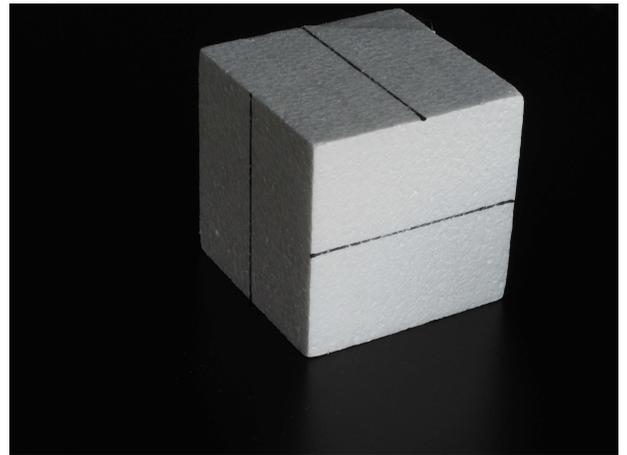


写真 15：切断ガイドとなる直線を引く

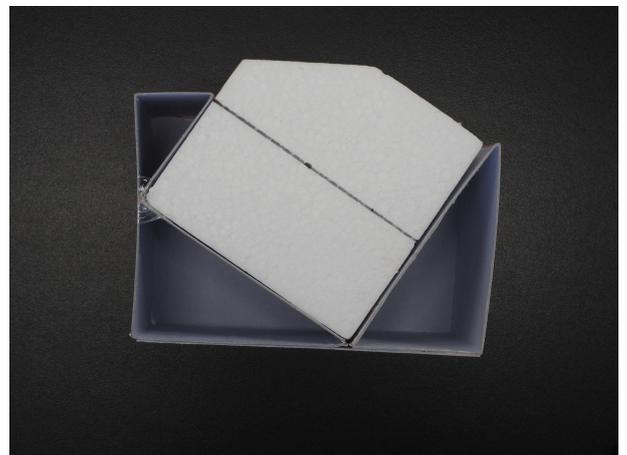


写真 16：発泡スチロール固定台

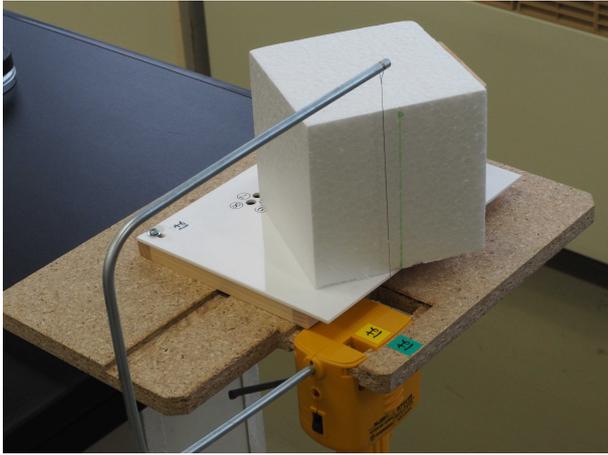


写真 17：切断機にセット

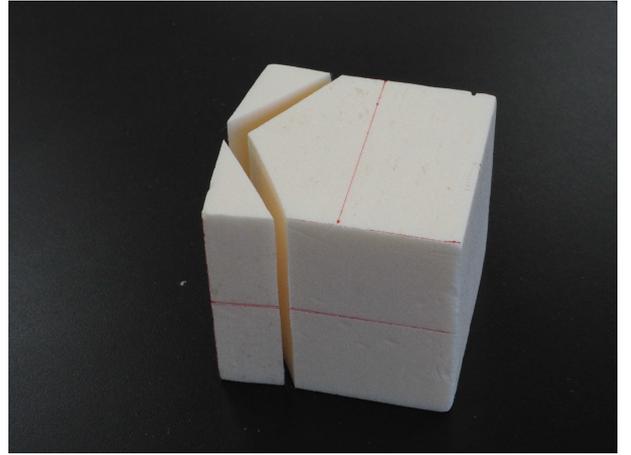


写真 20：反対の面も 2 回切断

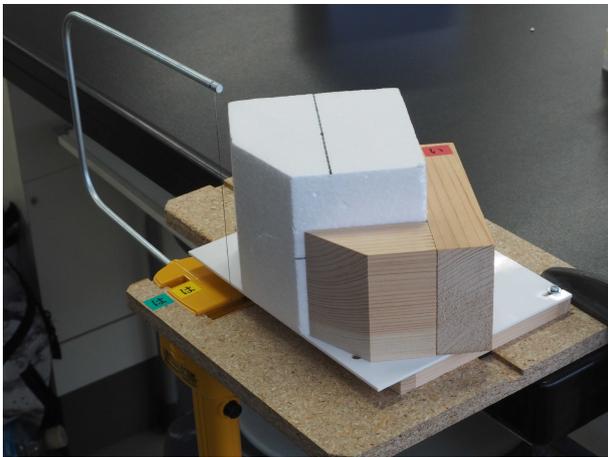


写真 18：立方体を置いた台を前にスライドする

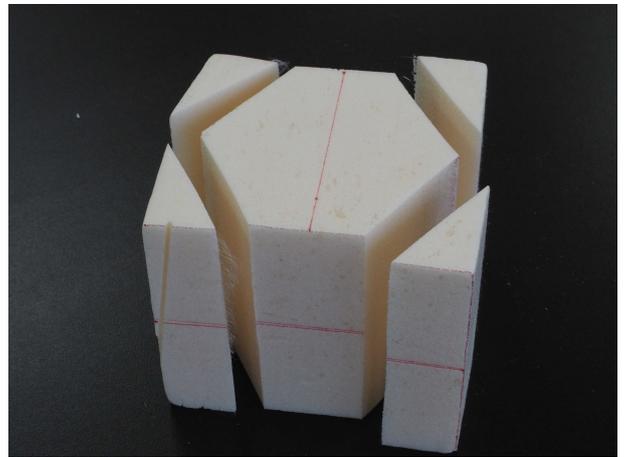


写真 21：反対の面も 2 回切断

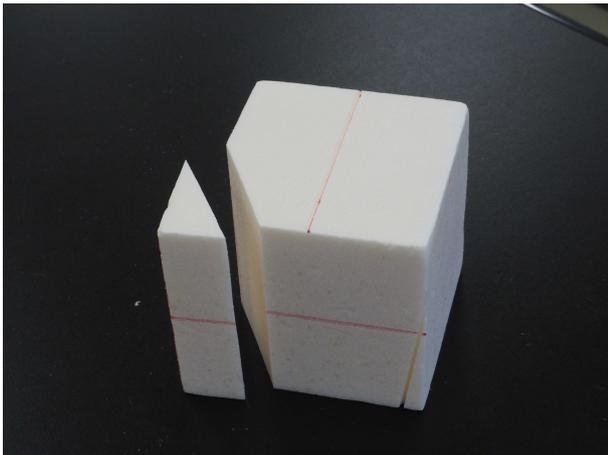


写真 19：立方体の 1 面に縦に中央に線を引いて切断

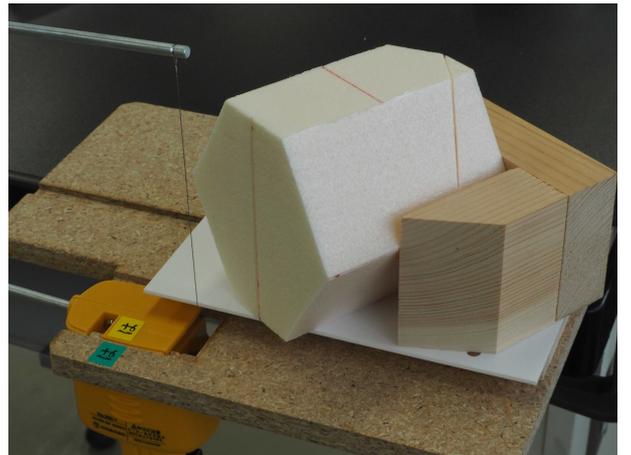


写真 22：天井の面をたてにして切断

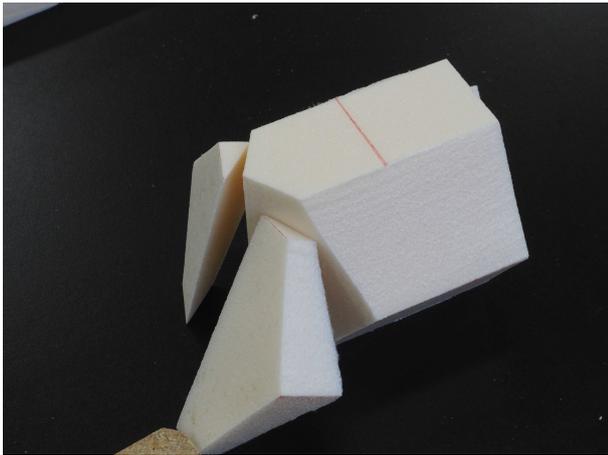


写真 23：上下反対にして 2 回目切断



写真 26：はじめて五角形が出現

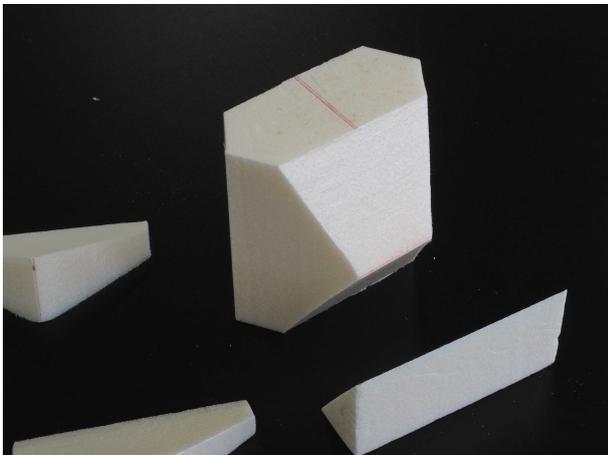


写真 24：反対の面も同様に 2 回切断

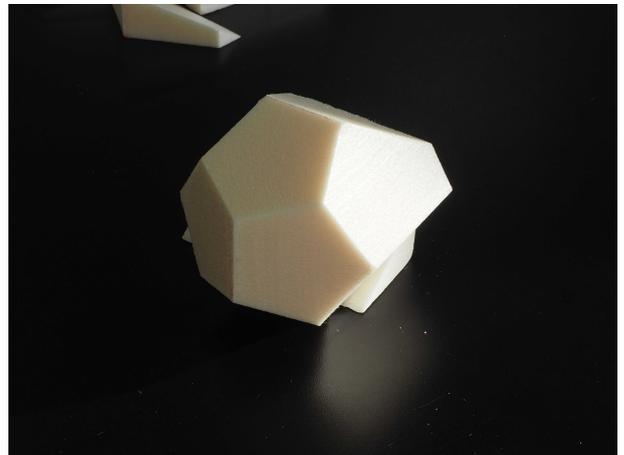


写真 25：上下反対にして 2 回目切断

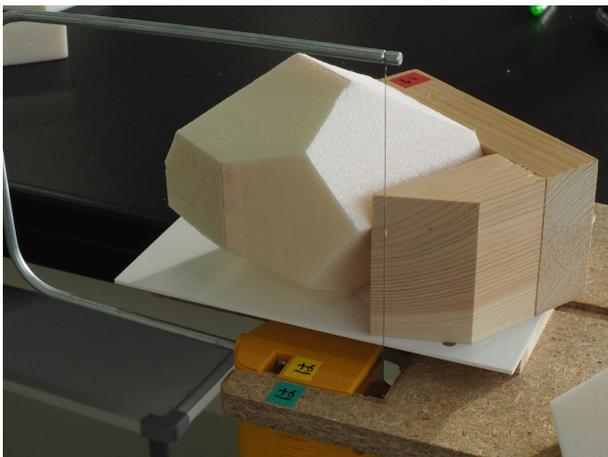


写真 25：まだ切断してない面をたてにして



写真 26：反対の面も 2 回切断

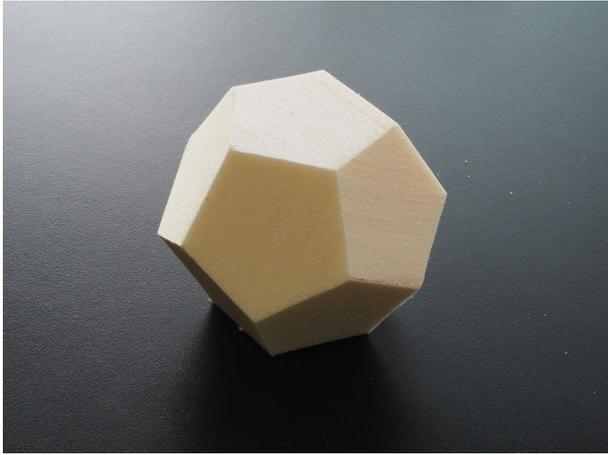


写真 27：正十二面体完成

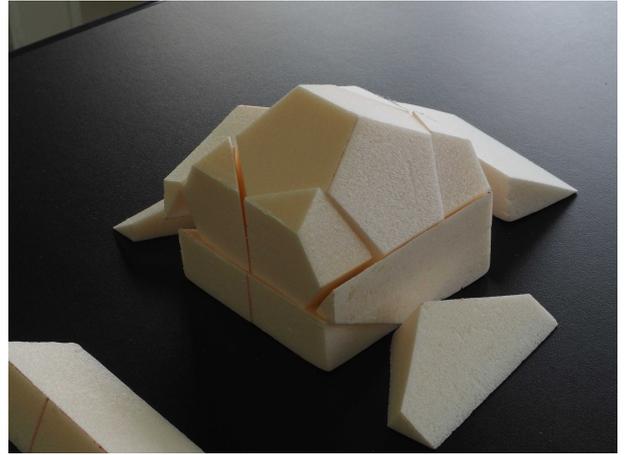


写真 30：このように埋まっていた 2



写真 28：切断破片をもとにもどすと



写真 30：このように埋まっていた 3

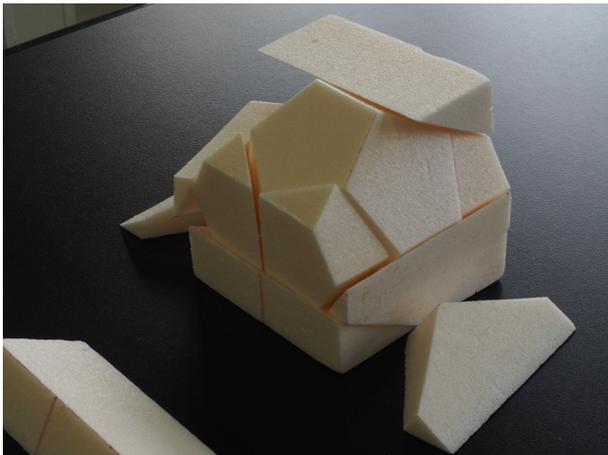


写真 29：このように埋まっていた 1



写真 31：このように埋まっていた 4

7 まとめ

もしも立方体の中に正十二面体が埋まっているとしたら、と考えて、正十二面体の隣り合う二つの面がなす角を計算して、その角ができるように切ってみました。数学的にはこの角度になるはずだ・・・という論理だったのですが、実際に作ってみたら正十二面体できました。

本当は面をつくる五角形の各辺の長さが同じで、辺と辺のなす角が 108° となることも証明が必要なのですが・・・

それにしても、不思議ですね。2つの面のなす角がそうなるように切っただけなのに、正十二面体ができるなんて。

平面上で、 60° の角度ができるように線を引くだけで正三角形ができてしまうのだから、当たり前なのかもしれません。あるいはどちらも不思議なのかもしれません。

8 もしも・・・だとしたら？

今回の学習では、立方体のなかに正十二面体がどのように埋まっているかを考えました。問題解決のために重要な働きをしたのは「もしも正十二面体が立方体の中に埋まっているとしたら・・・」と考えるところでした。

正十二面体が立方体の中に埋まっているとしたとき、正十二面体の中にある「平行」という性質は立方体の平行と関係あるはずですが・・・というような推理をするところがミソでした。

前回の学習のときもそうでしたが、多面体の構成要素は、「面」「辺」「頂点」と3つあるので、可能性としてその3つについてすべて考えることが重要でした。ひとつのものに注目して「見て」みたがわからないといってあきらめてはいけません。可能性のあることすべてについて点検することが大切です。「セカンドオピニオン」という言葉を使いましたが、そういう意味でした。

このように考えて「見る」視点を決めたら、見る視点を決めてしっかりと観察しましょう。

9 生徒感想

●ノートに書いて考えて見たが、やはり平面や頭の中で考えてイメージして見るのは難しかった。しかし、先生お手製の正多面体の模型を見てすぐに理解することができた。頭で考えて見るのはもちろん大切だが、時と場合によって、工夫して考える事もとても大切だと学んだ。そして多面体の面の形や長さを文字を使って求める事ができたので、とても驚いた。

●正多面体の形は、今まで自分で1から作ろうと思っていても全然うまく作ることができなかったのが、最終的に正十二面体を切り出すと言われて、どうやるのかなどと思った。

実際に1辺の長さをこれまでの知識で求めることができたので、全今日したことを活かすことができ楽しかった。

●先生が、立体図形を切ったときの形などを、わかりやすく論理的に推測しながら平面図形にして、一つひとつ図形を見せてくれたおかげで、イメージしやすくなったり、実際に木の正十二面体をさわって考える事で、一辺の求め方も分かりやすかった。普段の授業では一人で考えることが多い中、授業ではグループや班で考える事が多く、様々な考え方を学ぶことができとても楽しかった。

●数学のいろいろな問題でもよく使われている正多面体だが、面の形、辺の長さ、角度がすべて一緒なのはすごいなあとしか思っていなかったのが、深く考えてみるととても面白いということが分かった。立方体から正多面体を切り抜くときにはある一定の角度をもつ三角注を切り抜いて行かないといけないが、それを求める過程が難しかった。立方体から正多面体を切り抜くことは頭の中でイメージしたが、変な図形の完成図しか浮かばず、どうすればいいのだろうと思ったら、「立体は平面で考える」というスローガンのもと、論理で立体を観察し、見取り図や切断面を平面に描いていく作業を、みんなでいっしょに考えながらできた。切断する角度は計算できたが、本当にそうやって切断したら正十二面体ができるのか不安だったが、先生が作った立方体から正十二面体をくりぬいた模型があり、どのように切っていけばいいのか予想できた。正多面体の一辺の長さを1としたとき、切り抜く三角柱のそれぞれの辺の長さを求める際に x, y, z の3つの文字を使って求めることができたが、数が分からないものは文字を使えば求められることもあって便利だなと思った。身の回りの現象も文字で表してみたらおもしろい数式になるものもあろうと思うから、調べるのもいいかなと思った。

●正多面体という小さな図形の中にあれだけの計算式が詰まっていると言うことは驚きだった。面の数や頂点の数の規則性を見つけ、そこから、より難しい正多面体の状態を予想するのは面白かった。いろいろな正多面体について考え、正多面体に興味がわいた。

●辺の長さを求めるとき、平面としてみるという新しい考え方があり、とても面白かったなあとと思った。

●4人グループで切り出しの角度や長さなどを考えたが、皆の意見が新鮮だったり、自分にはなかった考え方をしている人がいたりして、グループで話し合うのは何か物事を考える上ですごく大切だし、それによって理解を深め合ったりできると思った。4人それぞれが違う考えを持っている時も、グループで話し合いをすることがとても重要な解決への近道だと思った。

●正多面体について考えたことは私の人生で一度もなかったのが、貴重な体験だった。考えるといろんなヒミツがあって、面白かった。グループで考える時間は周りの人の

考えを参考にして考える事ができたので良かった。このような考えは日常生活でも活かせると思うのでとてもためになった。これまでの授業を含めて自分に考える力がついて北のかどうかは分からないが、「こう考えて見たらいいんじゃないねえ？」のラインナップは増えている気がするので、ぜひこれを様々な場面で活かしたい。

正多面体を切り出すためにどのようにしたらよいかというのを考えて行く前に、多面体についてみることにいった活動を行ったが、見てみると多くの発見があったように感じる。正多面体の形の規則性、形の美しさといった多くのことに気付く事ができた。多面体の形の美しさを知ったことで、数学の世界により深く入り込んでいったような気がした。正十二面体を切り出す時には「もしも立方体の中に入っているとしたら」と考えて、多くの三角をきりとりていけばよいといことを学んだ。この探究の時間を通して学んだことは多くある。これからも続けていってほしいと思う。

●今まで正多面体を面や辺の位置などを確認しながらじっくり観察するのは小学校のころくらいしかやったことがなかった。高校生になってから改めて観察すると考えさせられることがたくさんあった。特に面どうしの間に生じる角の大きさは考えたこともなかったので難しかった。一方向から見ただけではなく、回転させて視点を変えたり考え方を変えたりすると新しい発見やひらめきが生まれる、ということがわかった。捉え方を変えるとわかるということは図形に限ったことではないと思うので、他の数学の問題などで躓いた時は実践してみようと思う。面の頂点と頂点をつないだり、三角形をみつけ出して考えたりなど、一つの事柄でも色々な考え方ができるということがわかった。他の人の考えも取り入れながら考えていく事でより考えが深まると思う。

●様々な角度から見ると、その図形の特徴が分かりやすくなると思った。だから、特に空間図形ではなににもない状態で考えるよりも実際に模型を手にとったり図をかいたりして考えた方が答えに近づきやすくなると感じた。問題を当たり前だと捉えてしまうと気づきが減ると思った。たとえば今回だと、正多面体を全ての面が合同な図形でできている単純なものだと捉えてしまえば、どの面とどの面が平行であるとか、断面はどんな形をしているかなどに注目できないと思う。今回の時間では、自分が基礎中の基礎の知識の習得をおろそかにしてきたことを痛感した。テストでは解法を知っていれば問題解決できるが、実際世の中の問題は解法などほとんどなく、それを解決するためには基礎を知らないと話にならないのだと知った。

●実際に正十二面体を見たときも、あまりに複雑で難しい印象は受けなかったのですが、立方体と比較して考えた時は、頂点の角度や辺、面などが思ったよりも複雑で、いざ計

算の問題をしてみると全然理解出来ずに苦戦しました。しかし、立方体と共通している面(辺)を探してみたら少しずつ分かるようになりました。平行になっている面や辺を探すと、正十二面体の法則性が見えてきて、それを班員で共有しながらさらに理解度が上がったので良かったです。他の多面体との共通点を探してみるのも面白そうだと思います。さらに「正十二面体」以外の多面体は作ることができないのか気になったので、インターネットで調べてみると今その研究などが行われているそうなので楽しみです。

●正多面体について考えるのがひっさびさすぎて楽しかったです。小学生だったときに感じたものと、今になって感じるの違いがあり、多様な視点から見る事ができました。正十二面体を見て、どう切るのか考え、計算し、考えを共有するというのができて良かったと思いました。今まで学習してきた数学の知識が活かされていてうれしいと感じました。

●立方体から正十二面体を切り出す方法の話し合いも、いつものとは違った自由なメンバーだったのでそれぞれの意見を活発に交流する事ができたと思います。正十二面体を手でいじりながら話し合っただけでも新しい特徴を見つけ出す事ができました。切り取るのは適当に五角形を作りながら切ってもきれいな正十二面体にはなりません。きれいにするために複雑な計算をして、角度を求めもう一度確かめた答えが同じだった時は非常に達成感がありました。今回の「見ること」の授業で、自分で正多面体の切り出し方を考えてみたいなぁと感じました。

●正多面体・・・なんて、今まで注目してみたことなんてありませんでした。ただただ先生にこれは正多面体だと、全ての面が等しい形でできているのだと教えられ、形を認識して初めてそれをインプットしていました。面の形はもちろん形の特徴やどれだけの正多面体があるのか、ましてや立方体からの切り出し方なんて考えてみたことすらありませんでした。もしかしたら頭の隅で「難しいんだろうな」と避けていたかもしれません。では実際はどうだったのか。想像通り難しかった？理解できない難問だった？答えは「否」手順すらわかれば難しいのは計算ぐらいで、あつという間に正多面体の特徴を知ることができました。特に正十二面体はひときわ美しい形をしているなど思い、実験のあいまで立方体から余計な部位がなくなっていく様は、見ていてもさすががしかったです。先生がつくっていらっしやった「おでんのにんじん」による正十二面体もすごいなど感心しました。

私は、私たちの身の回りにあるものを疑うことなく、これまで生活してきたような気がします。実際に正多面体だった、授業で触れるまで注目したことはありませんでした。けれども、ものの形の奥深さに気づいた今だからこし、もっともっと周囲を見渡し、疑問をもって生活したいなど

思いました。

●1回目から比を求めるまでのグループ学習がとても有意義な活動だったと思います。話しやすいメンバーと行うことで、疑問に思ったことをすぐに投げかけやすく、話し合いがスムーズに進みました。小学校からずっと学習を続けてきた多面体ですが、立方体から切りだそうと考えた時には、よく分からなくなりました。しかし、性質が分かってくると切り出し方がわかってきて、楽しく感じました。三角比の話は日常ではあまり使わないので、計算が大変でした。計算力をつけたいと思いました。今回はグループワーク主体だったので、楽しく相談しながら活動ができて良かったです。

●多面体をよく観察して平行になっている面や辺、垂直に交わっている面や辺を探し、計算することによって長さを出したりして、この計算の場面では「もしも●●であったら・・・」という最初の頃に教えて頂いた内容も使いながら取り組みました。改めて基本の大切さと、そこから発展させていく大変さや重要さを感じました。

●立方体から正十二面体を切り出すための角度は、分かっていることや x や y , z を用いて書き出すことで純に求めていくことができるということが大変だけど、ちゃんと求められることに驚きました。今まで正多面体というものについて、全然考えたことがなかったけど、今回の授業で考えて見て、いろいろと新しい発見があって、面白いなと思いました。普段はあまりこの授業のような考え方をすることができていない状態なので、これから普段もこの授業のような考え方ができるようにしていきたいと思います。そのために、授業で習ってきた「 n といったら1, 2, 3・・・」や「はじめはごー！」などという言葉や忘れずに、いろいろな場面でも応用できるようにしていきたいと思います。

●プラトン多面体が5つしかないという授業の次のステップとして「立方体から正十二面体を切り出す」という授業があったことがとても良かったと思う。いろいろ工夫して角度をつきとめて、考えるだけではなく実際に切り出してみることができた。三角柱を切っていくだけなのに、あるとき突然五角形が現れた時は思わず声をあげました。

●最初の方の授業で、立体の性質について考えた時、多面体の数や面の形、頂点、辺の数に少しだけ規則性があるように見えたり、それを授業でみんなで考えました。その時に、私は自分一人で多面体を頭で組み立てたり、どのようになるか考えたりすることがとても難しかったけれど、今回は何人かの班を作って、みんなで考えることができました。多面体でも、いろいろな視点で考えると見え方や感じ方変わったり、どのように作られているか考えたり、私が今まで全然触れてこなかった内容だったので、とても興味をもって授業を受けられました。「ここは何度?」「ここは何センチ?」などの問いは、いつもなら「分からない」と

諦めかけていたと思うけれど、班のみんなと考えていくにつれてだんだん楽しくなって、たくさん考えました。最初から最後まで自分たちでは求められなかったけれど、先生のヒントや解説を基にし、私たちが今まで習ってきた公式などを用いて計算できたときにうれしかったです。

●正十二面体を見る時間では、渡された木製の正十二面体を様々な角度から見て考えました。そのときに「もしも○ \circ だったら」ということを使いました。「もしも立方体から正十二面体を切り出すとしたら」「もしも立方体から正四面体を切り出してみたら」というように他の多面体についても考え、正十二面体の切り出し方のヒントを探ることができました。

一番難しかったのは、正五角形を正面にしたときの上の2つの面の角度の求め方です。どこを x とおき、 y とおけばよいのか、苦労しました。またその計算はとてもややこしく、なぜこんな式がでるのか順を追って考えました。

この2つの時間で大切だと思ったことは、1つ1つ順を追って丁寧に考えることです。その中で「もしも○ \circ だったら」ということをつかってみたり、グループ内で相談したりすることで正しい答えが導き出せると思った。このことは次の時間でも活かしていきたいと思う。

●スマホで三本の動画を見ながら線を引き、セットして電熱線で切る作業は楽しかった。やっていくうちに動画で確認しなくてもどこをどう切れば良いのかがわかってきた。もう少し効率よく作業を進めることができれば全員立方体を切り終わっていたんじゃないかと思う。

●立方体から切り出すのは楽しかったけれど、少しのずれで正十二面体にならなくなってしまったのが残念でした。ただ直線を引いてその直線を切っていただけで角度も考えずできたのがすごいなと思いました。複雑な工程だろうと思っていたので、簡単にできて驚きました。今回は正十二面体を切り出したけれど、その他の正多面体では切り出せるのか気になりました。また、他の方法で立方体から正十二面体は切り出せないのかなとも思いました。

楽しく図形について考えられた時間だったのでないかなと思います。動画という方法で、先生が何度も説明しなくてもいいように工夫されていて、ICT授業っぽくなっているのかなと感じました。

●私が図形が苦手だったけれど、この授業は皆と相談しながら答えに近いものを導く事ができてよかったし、今までのテーマの中で一番楽しかったです。正多面体についてはあまり興味・関心がなかったけれど、正多面体について詳しく知ることができたのでよかったです。またほかの図形の特徴も調べてみたいと思いました。今回はグループワークが多かったので皆の考えを共有し合うことができてとても勉強になったし、私一人で解決できそうにない問題だったのでグループの皆と切磋琢磨することができて本

校らしいと感じました。正多面体の問題を考えるにあたって二重根号などの基礎的な部分がまだできていなかったのので、教科書レベルの問題はできるようにしなければいけないと改めて思いました。そしてグループの活動に少しでも貢献していきたいと思います。次からの授業もグループワーク大目ですべて考えを共有していきたいです。そして復習をしっかりと行ってグループワークに今までよりも多く貢献できるようにがんばりたいです。

授業で考えてから実際に立方体から正十二面体を切り出して見て、初めはすごく複雑な工程なのではないかと予想していたけれど、思ったよりも単純な工程で驚きました。

作業の手順を説明した動画も分かりやすくてよかったです。音声も入っているとさらに分かりやすくなっていいのではないかと思います。

立方体から正十二面体を切り出す作業のときも仲間と協力して作業の動画を見ながら時間内に完成させることができてよかったです。

発泡スチロールを切断する際に、すこしずれてしまい断面が綺麗な正五角形にならず、あまり綺麗とは言えないような正十二面体になってしまいました。切断する時に発砲スチロールの切れ端を使わずにそのまま切断したのがずれた理由だと考えられます。時間ギリギリだったのもう少し作業効率を上げることができればいいと思いました。

今回のように実際に自分で作ってみるという活動はすごくおもしろかったし楽しかったです。次もこのような活動があればいいなと思いました。

●立方体から正十二面体を切り出すというのが次の課題となった。

最初私の班では、正二十面体で切っていけばいいのでは？という考えが出たが、これではないと分かり、なかなか話し合いが進まなかった。すると先生が急にドラえもん車のCMを流し始めた。最初どうということだ？と固まってしまった。先生の補足から「もしもボックス」が大切だと分かった。すなわち「もしも〇〇だったら・・・」という仮定を立てて考えることがキーだと理解した。そこから議論が進み、立体を平面で見たり、相似関係から辺の長さを求めたりして切り出す際に必要な角度、辺の長さを出した。次の時間はいよいよ切り出すとなったが、自分は公欠のため、その作業に参加することができなかった。しかし、今回の授業で「もしも〇〇だったら・・・」という仮説を立てて答えを求めるといことが大切だと分かった。

● x の関係式を作って最後まで求めることができて良かったです。長くて重そうな問題・式計算になると諦めてしまう癖があったが、友達と解くことで最後まであきらめずにとくことができたので、これからめんどくさそうな問題に出会ったら友達と解いて最後まで諦めないくせをつけたいと思いました。二重根号など前に授業でやったものを忘れ

てしまっていたので、復習をきちんとやっておこうと思いました。正十二面体を切り出すのは失敗してしまいましたが、どこでどうして間違ったのかを理解したので、いつかリベンジしたいです。ユーチューブを使っての授業で近未来感があって楽しかったです。動画がななめ横から出見づらい所があったので、真上からの動画があればよりよかったですのではないかと思います。正多面体はほかにもあるので、全部切り出したいです。「もしも〇〇だったら・・・」という前に做った考え方を、今回は x の関係式を考えるうえで活かすことができたので良かったです。正十二面体を切り出す上で、自分で決めて切るのではなく、仲間に「これでいいかな？」などの声をかけて切り出せば失敗を防ぐことができたかもしれないと思いました。また正十二面体の完成形をもっとイメージ出来ていればよかったですかなと思いました。切り出しを失敗してしまったのは残念ですが、楽しく学ぶことができて良かったです。

●立方体から正十二面体を作ることに驚いた。 x , y , z それぞれの長さを求める計算も値が難しくて大変だったが、解き終わったときにはとても達成感があった。また今回はプロジェクターの使用もあったことで、図がわかりやすく見方やどの辺が平行で垂直なのかの説明があった。正三角形から鶴を折る、ハノイの塔の探究などでは実習をしながら、今回は実習で実際に体験することで理解を深めることができたし、何より楽しかった。探究の時間は新しい物事の見方などが身につけて役に立つのでこれからも続けてほしい。

今回、実際に正十二面体を切り出して見て、論理として考えるのと、実際に切ってみるのでは天と地ほどの差があると感じた。今回は作るときにすでに切り出すためのセットを準備してもらったが、本来であれば、そのセットも自分たちで作る必要があったと思う。この時点で普通より楽をしているのに、先生が先に切り出している動画を準備してくださいとおかげでさらに手順を省くことができた。しかしこれほどのアドバンテージがありながらも、実際に切ってみるのは困難を極めた。グループ活動であったため、分からないまま進めないということはなかったが、1人では作ることができなかったと思う。だが、実験で「今までにやったことのないことをやってみる」という経験が増え、これは将来、私を手助けしてくれると思う。なので、探究で経験を積んでいくことはもちろん、家などでもできることはあると思う。授業などのすでにセッティングされている場所でなくても、自ら考え実行できるように、日々の意識を変えて行こうと思った。実習は記憶にも残りやすいのでぜひ機会を増やしてほしい。

●角の大きさを求める計算が一番大変だったし、難しかったです。しかし、きちんと段階を踏めば、求められないことはないのだなと思いました。私は面を中心に見ていたの

で、ひとつの面ともう一つの面が平行の関係にあるということには気がついたのでありますが、1つの辺と1つの辺が垂直の関係にあるということには気がつかなかったので、それがとても悔しいです。さらにその平行な2つの面が立方体の面からとったものだという先入観を持ったまま考えていたため、それが立方体から正十二面体を切り出す方法を考える上で邪魔をしていたのかもしれないと感じました。先入観に囚われてはいけなさと改めて感じました。まだ正十二面体は完成していませんが、前回のプラトン多面体の授業と合わせて考えると、今までの探究の時間の中で私が一番興味を持った話題だったし、一番楽しかったと思います。

●正多面体という言葉自体、聞くのが久しぶりだった。小学校の頃から図形の問題（面積、体積、辺や角）が苦手な正直大丈夫かなと強く思った。本当に立方体から正十二面体が切り出せるのかという思いや終始にあて意識があった。班の人の考え方がなければ進まなかったと思うので、周りの人の意見を聞くことは自分にとってプラスになるので大事なことだなぁと改めて実感した。

実際に正十二面体をつくってみて、ものを作り出すことの楽しさやおもしろさに気がついた。ただ、You Tube を見てもいまいち手順がわからない部分があり、てこずったけど、友達と協力したり教えてもらったりすることでうまく完成したので良かった。今回は発泡スチロールで作ったけど、授業で手にしていたのは木製だったので、実際はもっと難しいのだろうと実感した。何もない普通の立方体からここまで複雑な図形を自分たちでも作り出せるということに驚いた。なかなかない経験だと思うので良い経験になったし、図形を見出す力も少しはついたのではないかなと思う。はじめは頭を使ってどう切り抜くかと考える事が多くて苦手意識が強かったが、いざ作るとなると楽しかった。

●発泡スチロールを切断し正十二面体を作りました。10cm × 10cm の立方体の面の真ん中に線を入れて交互に縦線・横線を入れました。どこを切断すれば正十二面体になるのか想像がつかなかったが、最初に用意してあった装置に立方体の角を合わせて切断しました。切断する際に最初は想像できなかったが、「ここを切断すれば正十二面体のあの部分になるのではないかな」と仮説を立てて切断することができるようになった。正十二面体の形に近づいてくるにつれて、次にどこを切断するのか分かるようになってきました。全体的に見て正十二面体だと分からなかったが、一部分に注目してみると「正五角形になりそうだから正十二面体に近づいているのではないかな」と考えることができた。全体で見ても分からなければ一部分に注目して何か見えてこないかなあといった見方を変えることが大切だと思いました。たの問題でも最初から答えのゴールにたどり着くことだけを考えて、分からない、思いつかないで止まっている

時間があったくないので、わからなかったら見方を変えて見るのが大切なので、これからもそうしていこうと思いました。

発泡スチロールで正十二面体をつくるのが楽しかったので授業でみたようなにんじんなどの野菜を正十二面体でできたら面白いと思いました。

●今回の正多面体の授業で、やっぱり一番楽しいのはこれでした。正十二面体を切り出す授業の前に、正多面体の秘密や構成についてはある程度学んだつもりだったけど、最初、これをすると言った時は、本当にできるのかと疑問でした。しかも正十二面体となると複雑そうなので、難しいのではと思っていました。しかし、班員で動画を見ながら進めていくうちに、だんだん「次はこう切るんじゃない?」というように予想がついてきました。面の形は正五角形になりました。最終的に切り終わったあと、切り落とした変え家らの方を正十二面体にくっつけてもとの立方体にするのと、どこをどういう角度でどのくらい切ったかというのが分かりやすくて、スタートからゴールまでの道筋が復習できました。立方体が、実際に正十二面体を切り出して思ったのは、やはり実物の立体が手元にあると、それについて考えやすいという事と、一人ひとりが自分で正十二面体を作ってみることで、どういう経路で完成したのかというのが記憶にも残りやすいし、分かりやすいという事です。探究にあたって考えているだけでなく、話し合う、実験するなど、アクティブに行動することがとても重要なのだと思いました。

●立体⇒平面⇒辺⇒点のように、図形を分析する時は考えやすい次元まで簡素化することで新しいことが見えることが実感できた。実際の図形が目の前になくても、条件から図形を考えることが、数学では必要になると思う。なので、面で立体を考えることで図にしたときに手が付けやすくなると思った。自分は最初、正十二面体を、断面が六角形にあるように分けてみたが、それだと求めたい部分が分からないと、途中で気づき、五角形を断面とする分け方をしてゴールの一手手前まで考えることができた。

実際に切り出す時間では、正確に作ることはもちろん、何回で切り出すことができるかの仮説を立て、実験することができたので、有意義な実験となった。課題研究でも、理由を持った仮説をしっかりと立ててから実験をして仮説が合っていた、合っていなかった理由まで含めて研究していきたい。

●立方体から正十二面体を切り出すために、前の授業で学んだ正多面体の性質を振り返りながら式を立て、求めた。x と y を使って式を立てることは難しかったけど、いろいろな角度から正十二面体を観察することが大切だという事を学んだ。実際に切り出すとなると、どうするのか分かっていなくて、動画の通りにやってみたというだけになって

しまったのが残念だった。正方形の上下の辺の中点から約 31.7° をまずは切り取り、同じようにして3方向から切断したのだ、ということをやっていくうちに分かった。正四面体を切り出すためには、対角線を切るようにしたらできて、正八面体はその正四面体の辺の中点を切り出すことで作ることができるのではないのかと考えた。正二十面体は正十二面体よりも角の大きさを小さくすることで作られるのではないだろうかと思った。もっと正多面体を切り出してみたいと思った。また、2種類の多角形が組み合わさってできる多面体も作ってみたいと思った。

●考えて、切って、離れて、また考えて・・・。

この時間、私は悩み続けた。発泡スチロールを切り出すというだけの作業である。

正多面体とは非常にシンプルなものだ。いくつもの同じ図形が集まって立体になる。正多面体は1つでは作れない。図形を切り出す時、そばにはいつも仲間がいたように思う。どこを切ればよいのか、どう切ればよいのか・・・。数え切れない悩みから救ってくれたのは、同じテーブルの仲間たちだった。できあがったずけいはというと、正十二面体というよりかは、なすびのような、見る者が思わず吹き出してしまうような「不格好」以外には形容使用のない立体であった。そんななすびを見つめて、仲間の一人がふざけて口にした言葉をつぶやいてみる。「いびつな形は俺らの愛だ」。

「立体を作る」という点で、成功したと言えば嘘になる。しかし、かけがえのない仲間たちと図形作りを通じて育んだ友情は本物だと思いたい。正多面体のようにシンプルでまっすぐな友情は今だけのものかもしれないのだから。

問題を解くだけが数学ではない。仲間たちとともに考え抜き、1つの形にする。いびつでもいい。いやむしろそんな「いびつ」な思考こそ大切にして数学と向き合っていきたいと、そんなことを思った。

●線を引いて切るだけで正十二面体ができてとてもおもしろかったです。立方体と違って、斜めに線がついているので、はじめは「どうやって切るんだろう」ととても不思議に思っていました。いざやってみると案外上手にできてうれしかったです。動画だったので頭はあまり使わなかったのですが、いちいち説明するわけではなかったの、さくさくできて良かったです。切ったは良いんですが、なんであんなにか今でも理解できていないので、解説欲しいです。座学のときと違って、答えが手に持って分かるのでうれしかったです。切るだけで手一杯になっているので、プラトンさんみたいに切り方まで考えられるようになりました。

質問です。この時間はいつまでできるのでしょうか。2年生や3年生になったおきに理数科だけとなってしまったら悲しいです。私はこの時間が好きなので普通科文系系

もやってほしいです。先日行われた講演会で、「文系には文系なりのアプローチがある」と言われました。文系の皆さんには文系のアプローチとは何なのか教えてほしいです。この時間は普通の授業以上にためになるので、これからも楽しみにしています。なんなら普通の授業に来たり探究便りを週1で発行してみても面白いと思います。

●今まで考え方を身につけること中心の授業だったが、今回実際に自分でやってみることができて、純粋に楽しかったし、おもしろくとても興味がわいたものだった。今回も数学の中での他分野の考え方を使っていて、それぞれの分野が独立しているわけではないと改めて実感し、これからの数学を学ぶにあたって、苦手な分野を作らないように努力していこうと思う。また、実際に作っているときは、頭の中で完成図や切ったときの形などを思い浮かべながら立方体を切って行った。思い浮かべながらやることで、スムーズに進めることができ、完成まで辿りつくことができた。今回は立方体から正確な角度で切れるという器械を使って正十二面体を切り出した。以前、先生が授業で見せてくださった煮物の野菜が多面体であるという写真を思い出し、どのように切り出したのか気になった。他の多面体だとななるのか考えて見たいと思う。立方体などの図形から他の図形を切り出す事は数学だけに限らず、様々なところで役立っていると思う。他の(数学以外の)ジャンルと綱rがル事ができることを改めて知った。回を重ねるごとに考え方が身につけてきたような気がする。毎回楽しい授業なので、次回も楽しみだ。

●今回はいつもの授業と違い、自分が組みたい人と自由にグループを編成できた。そのことにより先生の話聞いてる時に、一人では分からなかった疑問点をグループの人と話すときに質問しやすかったり話しやすかったりした。だから今回の分野は比較的分からないところをなくすことができて、実際に正十二面体を作る際に班の人と協力しながらスムーズに取り組みことができた。

今回の授業では、「立方体から正十二面体をつくる方法」の考え方、方法を先生が解説してくださったが、どうやれば立方体から正十二面体をつくれるのかと考えた時、一人では悩むばかりで考えがまとまらなかった。だけど、同じ班の人や三浦先生にも教えてもらいながら自分たちなりの考えが深められた。先生の解説を聞いてみると、自分の考えと先生の考えの相違点を見つけることができて、なぜ間違っているのかよく考える事ができた。今回は今まで習ってきた知識で解くことができ、自分で答えを出せた時の喜びが大きかった。班活動だったからこそできたことはたくさんあると思う。とても興味深かった。

実際に立方体から正十二面体を切り指すと聞いたとき、自分の力でできるのか不安に感じたが、それよりも楽しさとしっかりとつくれるように授業で理解を深めようという

気持ちの方が大きかった。

物理室に行って用意してあった道具を見ると、よく考えられていてすごいなと驚いた。正十二面体をつくるまでは、その装置のどこがどのような役割を担っているのかうまくイメージできなかったが、実際作り始めていくとなぜあのような形にしなければいけないのか少しわかった。完成するまでは座学の時に分からない部分を班の人と確認していたので時間をあまりかけず、スムーズにできた。完成したとき、自分の手で立方体から正十二面体をつくることができうれしさや達成感があった。

今回の授業では班の人と多く関わることができた。一人では解決できないような問題も、考えがうかばない時も、班の人がいたからできたことがたくさんあった。他の人の考えを吸収して自分の知識としたり、自分も他人に教えることで理解が深められたり多くの部分で成長できる授業を受けられた。

●実験をする前は、本当にこんな単純な方法で正十二面体ができるのかと少し不安に思っていました。形が複雑である＝作り方も難しいのだろうという考えが頭にあったからです。なぜなら全ての面が同じ形であるというだけでずいぶん考えさせられるのに、それが12個もあって成り立っているのです。ほんの少しでもどこかの角や大きさが違えば、それは正十二面体でなくなってしまうのに。

実際に作ってみると、どんどん立方体から余計な部位が切り落とされて行ってみていて楽しかったです。少し方向が違っただけで立方体の見える形はどんどん変化し、全体像を想像せずにいたら失敗しそうになったこともありました。ただ受動的に切っていくだけでなく、想像力も働かせながらやらないといけないね、とお互いで話し合ったことも覚えています。立方体が正十二面体になっていく過程で出たカケラで、また新しい形を作れたり、新しい発見もありました。でも、こんな機械を考えて作ったという点に1番おどろき、どうやってこの法則に気づいて、ここまで形作れたんだろう・・・と。先生はすごい人なんだと改めて感じました。たいへん貴重な機会をいただきありがとうございました。