1 年数学　探究の時間 III

パズル「ハノイの塔」

2020 年 5 月

1　パズル「ハノイの塔」

Wikipedia によると，「ハノイの塔」はフランスの数学者エドゥアール・リュカが 1883 年に発売したゲーム『ハノイの塔』をルーツとするパズルなんだそうです．いろいろな形で売り出されています．リュカによる最初の『ハノイの塔』に同封されたリーフレットには、次のような伝説があると書かれていました。

> インドのガンジス河の畔のヴァラナシに、世界の中心を表すという巨大な寺院がある。そこには青銅の板の上に、長さ 1 キュビット、太さが蜂の体ほどの 3 本のダイヤモンドの針が立てられている。そのうちの 1 本には、天地創造のときに神が 64 枚の純金の円盤を大きい円盤から順に重ねて置いた。これが「ブラフマーの塔」である。司祭たちはそこで、昼夜を通して円盤を別の柱に移し替えている（移し変えのルールの説明は省略）。そして、全ての円盤の移し替えが終わったときに、世界は崩壊し終焉を迎える。

さて，ここに用意したものも，数ある「ハノイの塔」パズルの一つです．3 本の柱があり，柱が通るような穴のあいた，大きさが異なる 10 枚の円番が，大きい円盤から順に重ねられています．

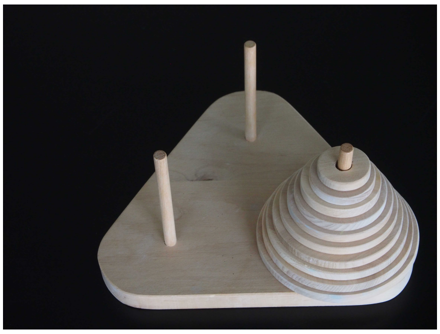
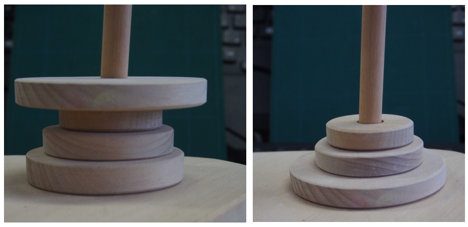


写真 1：ハノイの塔 (10 段)

この 10 枚の円盤を別の柱に移動しますが，移動にあたり次のような規則があります．

(1) 1 回の移動で移動できるのは 1 枚の円盤とする (2) 小さな円盤の上に大きな円盤を乗せることはできない．



×　　　　◎

写真 2：上にのる円盤は大きくてはだめ
大きい円盤の上に小さい円盤

2　今日の問題

10 段のハノイの塔，隣の柱に 10 枚を大きいものから順に積むまで，何回移動しなければならないか？

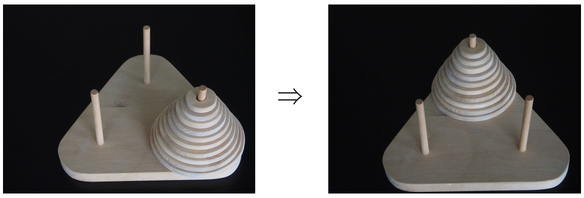


写真 3：　この状態　から　⇒　この状態　へ

みなさん一人ひとりに，この「ハノイの塔」が配布できればよいのですが，残念ながらできません．教科書やノートや単語帳, 消しゴムなどで代用してやってみてください．

写真 4：あるもので「ハノイの塔」

生徒 A：最初はいいんだけど・・・
だんだんこんがらかってくる.
生徒 B：どんどん面倒になるんですけど
生徒 C：ふー・・・いやになってきた・・・

3　難しい問題は簡単にする

というわけで，問題を考えるときの常套手段をマスターしましょう.

nといったら，1，2，3，⋯！ 簡単な場合で考える

みなさん，なんとか 10 段の「ハノイの塔」をつくって，ぱたぱたとやっていますが，途中でこんがらかってきてうまくいきませんね.

10 段までいかなくても 5 段ぐらいでも十分複雑になってきますよね.

10 段でも十分むずかしいのですが，これが 64 段になれば，もう大変です．気分的には「無限大」って感じです．まるで「n段」とかって，文字を使って言われたようなものです.

このように「『n段』のハノイの塔を考えよ！」といわれたようなときの「絶望感」ありますよね．こんなときの対処の仕方をマスターしましょう.

とにかく，自分が考えられるように十分に簡単・単純な場合について考えてみるのです.

1 段のときは・・・次のようになって，1 回の移動で完了です.

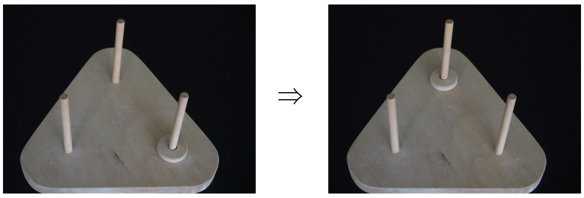


写真 5：　1 段の移動

生徒 A：そんなのはあたりまえじゃん・・・
生徒 B：じゃあ，次は 2 段のときの移動を考えようか・・・

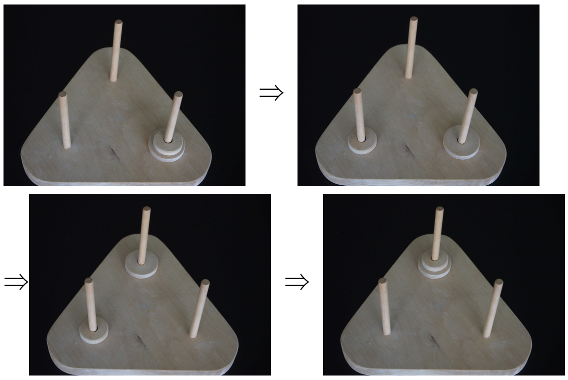


写真 6：　2 段の移動

生徒 A：ここまではいいのよ
10 段だとわけわかんなくなってしまう.
先生：どこまでわかる？
わからなくなるまでやってみよう.

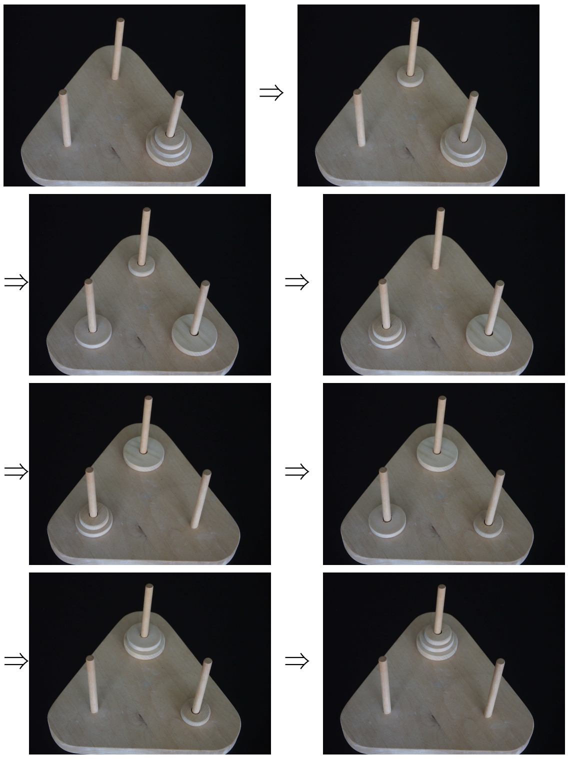


写真 7：　3 段の移動

生徒 D：ここまではいいんだけど・・・
次やろうとしたときに・・・
最初の移動をどっちするかで
こまっちゃうんだよな・・・
移動先を，真ん中の柱にしたい
生徒 C：まあ，移動先を一番左の柱に変更してもいいんだけどね.
生徒 B：でも一番下の円盤を動かした後に，次に

大きい円盤の移動先は確定だから，そこを
コントロールできないとつらい・・・

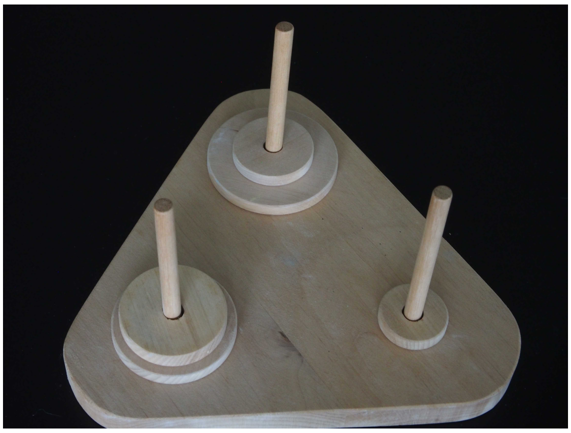


写真 8：　次はどっち？

先生 T：ここまでの結果をまとめてみましょうか.

段数	1	2	3	4	5	···
回数	1	3	7	?	?	···

先生 T：4 段のとき何回だった？
生徒 A：17 回！
生徒 B：13 回！生徒 C：・・・
先生 T：この辺でわからなくなっちゃった・・・？
ここの段階で 10 段だと何回になるか予想できる人いる？
生徒 D：たぶん・・・4 段だと 15 回，10 段だと 2013 回？
生徒 A：は？なんでだ？・・・
先生 T：おー，D さんは，きっと n 段だと何回になるか数式が頭にあるみたいだね.
それ，野生の勘じゃなくて理由を説明できる？
生徒 D：野生の勘です！

4　結果を予想するか，変化を予想するか ···

こうやって，「問題を簡単にして考える」ことの目的は，簡単にする前の難しい問題を解決することなんですよね．簡単な場合を考えることによって，上の表の回数のところを予想しようとする人は多いでしょう．でもそれが難しいときには，

$\boxed{\text{変化に着目する}}$

ことに注意しましょう．

4 段だと何回で移動できるか，その回数しか見ていないようですけど，その途中経過に注意してみましょう．1 段のとき 1 回で移動できたのが，2 段だと 3 回になったのはどうしてか？ 2 段のとき 3 回で移動できたのが，3 段だと 7 回で移動となるのはどうしてか？・・・

生徒 D：4 段のときは 15 回になるな・・・
生徒 A：え？どうして？
生徒 D：だってさ・・・
上の 3 段をまず一番左の柱に待避させるじゃん．3 段の移動だから 7 回でこうなる．その次に，一番下の円盤を隣の柱に移動して，待避していた 3 段を大きい円盤の上に移動させる．
そうすると　$7 + 1 + 7 = 15$ 回だね.
え生徒 B：え・・そうなの？
先生 T：より簡単な場合で確認してごらん.

写真 7 に，3 段の場合の移動の仕方があります．最初の 3 回で上の 2 段が隣の柱に移動しています．そして一番したの円盤が目的の柱に移動して，その後残りの 2 段が 3 回かけて移動して，合計 7 回の移動になりますね.

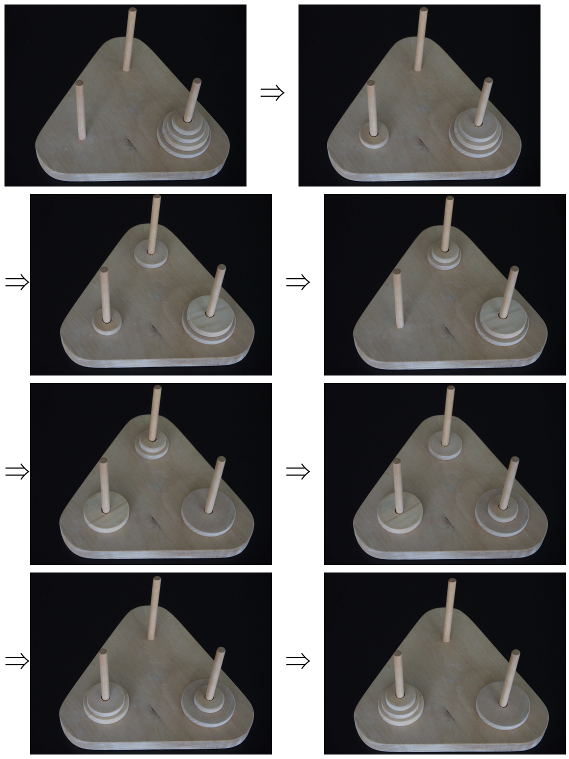


写真 9：4 段の移動・・・上の 3 段が移動するまで・・・

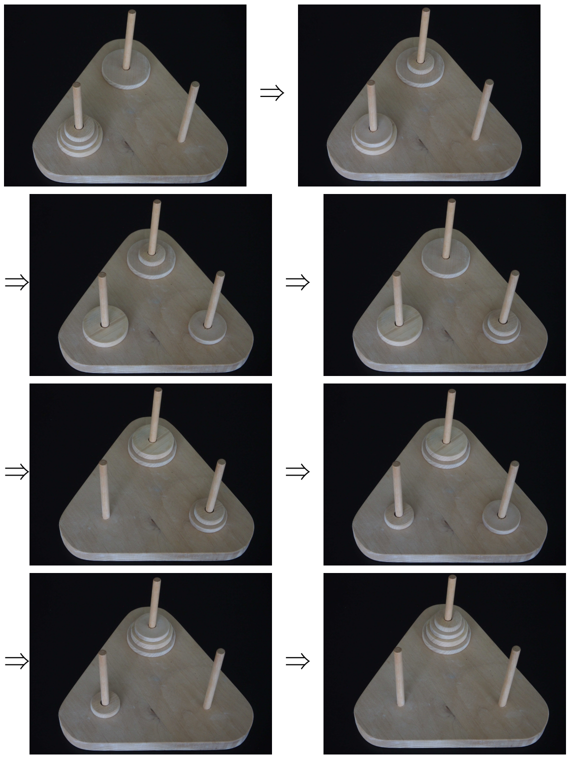


写真 10：4 段の移動・・・一番下が移動して・・・

このように，一段増えても，そのときの移動が，増える前の過程を組み合わせて考えることができるので，同じように移動回数がわかります．

4 段のとき 15 回で移動できることがわかると

5 段のときには　$15+1+15=31$ 回

さらにこれを用いると

6 段のときには　$31+1+31=63$ 回

同様にして

6 段のときには　$31+1+31=32$ 回

7 段のときには　$63+1+63=127$ 回

8 段のときには　$127+1+127=255$ 回

9 段のときには　$255+1+255=511$ 回

10 段のときには　$511+1+511=1023$ 回

以上をまとめると以下のような表になります．

段数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
回数	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023

先生 T：D さんは，n 段のときは　2^n-1 回になるという予想をもっていました．そうですよね．

生徒 D：はぁ，そうですね．

先生 T：D さんは，正しい予想をしていましたが，どうしてそうなるか確信をもてませんでしたね．

生徒 D：まぁ，そうです．

先生 T：でも，今となると，自信をもって，そうなるといえますね．

生徒 D：ぁ，はい．

先生 T：でも，まだ説明できない・・・と．

このように，結果の予想の説明はできなくても，

段が増えるごとに　**どう変化するか**

はきちんと説明できます．

5　まとめ

皆さんは難しい問題に遭遇したときにどのように対処してきたのでしょうか？図形の問題だったら，想像もできなかった補助線を先生が引いてくれて解決したり，こういう問題はこの公式を当てはめればよいよと公式を覚えたり・・・．

でも，なぜそういう補助線を引くのでしょう？便利な公式はどうやって見つけたのでしょう？その場面で使える公式をみつけるのはどうするのでしょう？適切な補助線や公式を使うと解決できるとわかるまで問題となっている状況をきちんと理解しようとしてきているでしょうか？

第 1 に取り組むべきは，**問題となっている状況を理解すること**ですよ．今回考えた「ハノイの塔」では円盤の移動回数を求めたかったのですが，実際に円盤を動かして「回数だけに注目」していても、そこで何が起こっているかわからなかったでしょう．1 段増えるとき回数がどれだけ増えるか？その理由はどうしてか？に気がつく必要がありました．

そこで起こっていることを理解するためにやらなければならないのは

まず具体化！

です．$n=1$ のときはどうなっているか？ $n=2$ のときはどうなっているか？ $n=3$ のときはどうなっているか？・・・考える前にまずはそれをやってみる必要がありました．そして，それをやりながら，「最初はグー！」だから n 段が隣の柱に移動するためには・・・と考えて，一番下の円盤が隣に移動しなければならない・・・ということは，・・・上の $n-1$ 段が別の柱に待避しておかなければならず，そのためには一段少ない $n-1$ 段のときの答えを使ってやればいい・・・．

そういう「n 段の移動」のなかにある（変化の）「構造」に気がつくかどうかが鍵でした．ハノイの塔に限らず，

「n といったら 1，2，3，$\cdots$」

によって「具体化」できることが多いのです．

どんどん使っていきましょう！

6　生徒感想

●折り鶴の授業やハノイの塔などの、実際に実物を使って考えて見る授業はただ紙に書いて考えるより興味を持って

考えられました。またその実験をもとにして自分たちで式をつくり規則性を考えるのは少し難しかったですが、規則性が発見できたときはうれしかったです。さらに授業ごとに「ｎといったら１，２，３」などのコンセプトがあって、問題を考えることに大切な事を学ぶことができ、これからも活用していきたいと思いました。

●特に印象に残っているのは、ハノイの塔です。全てをやってみなくても、どのように回数が増えているかや文字を使って公式を使ってみたりすることで、答えが求められるということがわかりました。

●はじめは担当の先生は数学のできるとても頭の良い人と思っていたので少し硬いイメージがありました。しかし授業を受けて、とてもおもしろくためになる授業をしてくれるというイメージを持ちました。「難しい」ときは「簡単」に変えてしまおう、「考える」という事は隣の人とお話をすること、言葉で話す、絵をかく、やってみよう、変化するものしないものを考える、この言葉は数学だけではなく、たくさんのことに共通して言えると思います。「なぜ？」という疑問を持ち、自分の考えを広げていきたいです。

●何度か見たことはあったが、じっくり考えたことはなかった。「n といったら 1, 2, 3, $\cdots$ 」、変化するものしないものに注目した。クラスメートの発見を聞き、頭では理解できたものの実際にやると複雑で $n=4$ の場合からは実行に移せなかった。

●計算機や AI が発達している中で数学という教科で私たちが学ぶべきものは計算のやり方などではなく、答えを出すための過程や仕組みである。そしてそれを理解することが最も大切なのだということがわかった。また問題が解けない時に自分を卑下しても何も生まれない。どうして難しいかを考えることをするのが大切だという考えを言っていた。ただがむしゃらに解いていこうとするのではなく、その問題の難しい点、つまりその問題を解くカギになるところをはじめに見つけていくのが大事なのである。中学生の時はがむしゃらに進んで難しい問題にぶつかったときに諦めて一人で落ち込むタイプだったので、もっと早くから気づいておくべきだったと思う。数学の魅力はゴールまでの道のりが一つだけではないことだ。いくつかの方法があって、他の人と比べた時に解き方が違うことを知った時はおもしろい。自分だけの世界にとらわれないことを大切にしていきたい。

● 10 段ある円盤を別の場所に移すというパズルで同じようなものを見たことがあるが、枚数が 1 枚増えると、移動回数が×２＋１となるという規則性があることを知らなかった。「変化するものと変化しないもの」に着目することが大事であるように感じた。また $\times 2+1$ の $\times 2$ は、一番下の段以外を 2 回同じような操作で動かすから、+1 は一番下の段を動かすからということが分かった。難しい内容だが、考える事の重要性や楽しさを学べたと思う。

●今日やったハノイの塔は、10 枚の移動をやろうとすると大変でした。ですが、そのとき、少ない枚数でやるのがまずは良いのだと、2 枚からやりました。（n といったら $1\cdot2\cdot3\cdots$ ）するとだんだん法則が分かってくるようになりました。枚数が増えただけで、その直前の動作は前の枚数でやったときと同じであると分かったときにはとても感銘を受けました。またそれを式に表すことにより解くことができました。

●今回の 4 回の授業を受けてみて、一番最初に思ったことは「何を考えるか」です。今まで私は問題自体を問うことはほとんど無く、そのまま考えて解いていました。しかし、今回授業で「なぜ」そうなるかから考えることを学び、考え方の軸が広がったことを実感できました。

また、図形やパズルでは、一見すると複雑な内容ですが、実際に考えてみるとある程度のパターンがあることを知りました。

他にも「変化するもの」と「変化しないもの」の違いから考えを見つけることや、他人の意見に「なぜ？」と問うことなど、今までの数学の授業ではなかった「考え方」に着目した授業で、新鮮さのある楽しい授業でした。

この考え方は、数学にはもちろん、日常でも使えるものだと思いました。例えば普段当たり前と思っていることを「なぜ？」と考えたり、テレビの意見に批判的になったりと、活用することのできる内容でした。

今回の 4 回の授業をやって「考え方」に注目した授業を受けたことで、より数学を理解できるのではないかなと思いました。

また、難しい問題はどこが難しいのか、どこが変化するのかを意識して学習していこうと思いました。

今回の折り紙、図形、パズル、方程式の授業はとても貴重なものでした。最初は全く理解ができませんでしたが、やっていくうちに考え方を身につけることができました。これからの生活で活用していきたいです。

●今までは、ずっと教科書どおりの数学の授業しかやってこなかったので、この授業はとても新鮮な感じでした。1 時間目にやった方程式の授業から始まって、今日やったハノイの塔など、クイズ形式のような、頭を柔らかくして考えたり答えを導き出したりするのが楽しかったです。2 時間目に行った折り紙の授業では、三角形から鶴をつくるというものでした。今まで私はそんなことを考えたことがなかったので、興味をもって考えられました。近くの人たちと意見を出し合い考える事はとても大切なことなので、それができて良かった思います。先生が言っていたとおり、まず問題となっていることについて、簡単に実験してみて何が起こっているのか調べてみて、実験結果を予測していき、その結果をもとに、変化のしかたに着目してどのよう

に変化していっているのかを見ながら問題を解いていくことが大切だと改めて思いました。ハノイの塔では 10 段の円板を、1 回に一個動かして 10 個全部を動かす問題も面白かったです。先生が言っていた言葉を思い出しながら実験していくことができました。積み木がどのように動いているのかを考えました。となりの人や近くの人と協力して考えることができました。また動き方に法則性があることを改めて実感することができました。このように多くの人の意見を合わせて、間違いを恐れずに、自由な発想で数学の問題をときたいです。

● 10 枚の円盤を 3 つの柱のうちの 1 つに移すときに最小何回かかるかについて考えた。これも前回と同じように「難しい」ときには「簡単に」を使って、 1, 2, 3, ･･･ 回目などを考えてそこから法則性を見つけた。この授業では変化する物と変化しないものを探した。変化しない物は、前に動かした回数分動かすと言うこと。変化する物は新たに次の円盤を動かす 1 回。このことから前の 回数 $\times 2+1$ が次の円盤を動かす回数になると分かった。よって 10 枚目を動かすには 1023 回動かすという結果が出た。自分的には、この授業が一番法則性を見つけやすく理解できた。

この 4 回の授業を通して、自分の固定概念ではなく問題の本質を見抜く力がついたと思う。

これからも活かしていきたい。

●友達と話し合ったり見たりすることで新しい考えが浮かび、また挑戦してみる。その繰り返しで良い力がついた気がします。その時に、まずどんな法則があるのかという予想をたててからやってみることで、少しずつ正解にたどりついているような感じがしました。

「探究の時間」の授業はとにかく考えてみつけることが大切なんだなと思います。高いレベルの人の考えを聞くことで私の考え方に新しさを追加できたらいいなと思います。そのために自分の考えを共有し、他の人とどこが違うのかを捉えてみようと思います。この授業は週に 1 度だけなので、一回一回大切にしたいと思います。

●自分は中学生のころから今に至るまで、数学への苦手意識が強い生徒でした。それは今も変わることはありませんが、一つ変わったことがあるというなら、なんとなく答えをだせたからいいや、なぜそうなったのかは分からないけど答えはあっているからいいやなどといった考え方、どうしてそういう結果になったのか、どういう筋道があるのかという仮定を大切にしていくという考えに変わったことです。それは他の問題に通用する再現性がないため自分の力にならないと思います。まぐれであたったからそれでいいという考えから脱け出し、プロセスを大事にするという考えにシフトできたのは「探究の時間」のおかげです。

ただ、この時間で問題の意図（先生が私たちにどう解いてほしいか）がくみ取れなかった場合、その 1 時間のうち先生が解説してくださる後半の時間までがただすぎてしまうように感じます。これは私だけにあてはまるのかもしれませんが、問題に対しどう解いていけばうまくいくのかと予想できないとそれ以上考えが進まないからです。だからといってこの生徒自身が問題解決に向けて試行錯誤をする時間が無駄というわけではなく、自分たちの思考力をあげる大切な時間であることに変わりはないと思います。

今後の授業では、まず自分の力で問題を解いてみる、そしてその後の解説でどういう方法で問題に取り組めばもっと簡単にとけたのかということをしっかり理解するという目標をもって取り組んでいきたいと思います。

● 3 時間目は、ハノイの塔を考えました。見たことがあり、少しやってみたことがありましたが、途中で分からなくなりあきらめたという経験が、けっこう前にあったので、正直面倒くさそうだなぁと思いました。でも、やってみると、仕組みが理解できて、夢中になってやっていました。最小の数で移動させることは自分一人では当たっているかどうか分からないので、皆で確認していきながら探究できたと思います。

●私が「探求の時間」の授業で一番楽しかったのは、ハノイの塔です。最初は規則性なんて何も考えずに、ルールに従ってただ板を移動させるのを楽しんでいたのですが、だんだん枚数を増やしていくうちに、「あれ、この移動、前にもやったことあるから、二度手間なのかな」とか「この順序で動かしたら枚数少なかった時と同じようにできるんじゃないかな」と自分で思えるようになりました。小さなことでも、自分で発見できたという事実が嬉しかったです。今までの授業で、唯一自分で発見することができた授業だったので、思い出に残っています。私は小学校の算数の頃から苦手で、中学校でも数学の自主学習はできるだけやりたくないなと思うくらい苦手意識が強かったです。なによりもテストで数学的な思考を問われる問題はとれなかったので、入学してすぐの頃の週に 1 回ある探求の授業は不安でいっぱいでした。「普段の授業もついていくだけで必死なのに、私の苦手分野が詰め込まれた授業はもっと大変なのではないかな」って思っていたけど、授業の雰囲気は想像していたよりも和やかで安心しました。三角の紙で鶴を折ったり、ハノイの塔を考えたり、直線を引いて平面を分割したり、数字ばかりを気にして考えるのではなく、まずは手を動かしてやってみる。その中から簡単な数字に置き換えて考えたり、自分で知っている方法や知識を参考に、初めて見るもの体験するものから規則性や決まりを見つける。私は前期中間考査までの時間でこのようなことを学びました。すごい難しい問題や初めて見るような問題が出てきても、さっき書いたようなことができれば、少しは筋道が見えてくるのではないかなと思いました。

探求の時間に先生が投げかけてくれる問いは、難しくて

奥が深いなと、授業の最後にいつも思います。数学が得意になるのは無理かもしれないけれど、この「探求の時間」を通して、もっと「楽しいな」と思えるようになりたいです。そして普段の授業で扱う問題も苦痛にならずに触れることができたらいいなと思いました。次の授業も楽しみです。

●大きな白い紙に具体的なハノイの塔の動きを書き込んでいき、構造を確かめていくことは、何も数値的な規則性を見出すことができていない状態でも、楽しかった。なぜなら物事の運びが目に見える形で積み重なっていき、視覚的に理解できたことが増えていったからである。問題には書いていなくても、必ず起こる変化を言葉として構成していくと思考がまとまりやすかった。この具体化の作業が問題を解く上で大切だと思った。数の並びだけを見て規則性を発見するのは難しいが、物語の手順を具体的なイメージで理解して、それを数や式におこすことは意外と簡単だった。その具体的なイメージをつかむために、$n = 1, 2, 3, \cdots$ のときを試したり、完成形から逆算していく作業が必要なのだと思う。

●パズルのハノイの塔で 10 枚の円盤を隣の棒に移動するのに何回かかるかという授業。全然考えが浮かばず、正直友達とのコミュニケーションで分かったことがたくさんあった。友達との交流は大事だと感じた。そして分からない数が出てきたとき、それをｎとおいて、「ｎといったら１，２，３」を活用すればよいと感じた。少しの時間だったが、とても頭を使い内容の濃いものになったと思う。

●ハノイの塔では、まずできる所からやってみるという考え方の大切さが分かった。「ｎといったら１，２，３！」のとおりに、ｎに少しずつ代入して求めた結果からパターンを見いだし、そこから式を作ることができた。円盤の動きを式が説明しているように見て、とてもおもしろく感じた。このような「ｎといったら１，２，３！」の考え方は、もちろんその次の直線でいくつに分けることができるかを求めた授業でも使うことががきたし、その他の数学でもわからないことをｎとして１，２，３を代入してみるといったような考え方として使うことができると思った。

●私はこの授業を受けるまでは授業の受け方や問題への取り組み方、問題の意味を分かっていなかったり、ちゃんと理解することは出来ていませんでした。しかし、この授業を受けたことで以前より取り組み方が変わりました。「ｎといったら１，２，３・・・」であることや、いつも Why? Why?と考え続けること、実験で結果を予想すること、周りと話し合うことで自分と違う考えを発見できるということなど、多くのことが分かったし、改めて気付きました。いつも● Why? Why? と考えて取り組むことが特に印象に残りました。この「いつも Why? Why?」と考えることは他の教科にも共通して行えることだと思うし、部活動などにも役に立てることができると思いました。だから、多くの事で一つの考えだけにとらわれて考えず多面的に物事を考えていこうと思いました。

●非常におもしろい授業だと思います。普段の少し硬い授業から離れて身近にある物やゲームなどを数学的に考えていく。そんな所が私にとってとてもおもしろく、又、意味のあるものだと思います。特にハノイの塔の授業では、枚数が 1 枚増える毎にどのような操作をするのかを観察し、数式化するのがとてもおもしろかったです。数学が日常生活の隅々まで関係しているのだという気になって、数学がまた一段と好きになれました。今までは難しい応用問題を解くことが楽しかっただけの数学が、とても意味のある学問なのだと知り、少し自分を誇らしくしてくれたこの授業。今後の授業も楽しみにしています。これからもよろしくお願いします。