

# 1年数学 探究の時間I 方程式を解くとは？

2020年5月

## 1 方程式を解きましょう・・・

次の問題を考えてみましょう。

次の方程式を解きなさい。

(1)  $x^2 - 4x + 3 = 0$

(2)  $\sqrt{x} = x - 2$

きっと (1) はみなさんスラスラと解けるとと思います。皆さんを代表して A 君に (1) を解いてもらいましょう。(2) ができてる人いますか？できたら手を上げてください。

(1) みんなできてますね。

(2) は、こんな問題みたことない！でしょうか。確かに中学校では勉強しませんでした。ちょっと難しいです。

難しい問題にぶつかったときに「いやだなあ」とか「こんな問題教わってない！」とか思いますけど、これからはこう考えましょう。

この問題が解けないのは、  
私の能力に問題があるからではない！  
この問題はそもそも「難しい」のだ！

こう考えるだけで気持ちが軽くなるでしょう。解けないのは、問題が難しいからなんです。気持ちが軽くなったところで、次にこう考えましょう。

「難しい」のは何が原因なんだろう？

「何が難しく (2) が解けないのだろうか？」と「難しい」と「原因」を考えてみましょう。

今まで勉強してできた方程式と、(2) の方程式はどこが違うのだろうか？

B 君：ルートかぁ・・・

T：ルートが原因だと思ったら、どうしよう・・・

「邪魔者」は消そう？

T：どうやって消そうか？

C 君：あ～！そうっか・・・

T：じゃあ、C 君に黒板に出てもらって (2) の答えを書いてもらおうか。

(1)  $x^2 - 4x + 3 = 0$

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3) = 0$$

より  $x = 1, 3$

(2)  $\sqrt{x} = x - 2$

両辺を2乗して、

$$(\sqrt{x})^2 = (x - 2)^2$$

$$x = x^2 - 4x + 4$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x - 1)(x - 4) = 0$$

より  $x = 1, 4$

T：みなさん、こんな感じで解けたでしょうか？

D 君：先生！(2) の  $x = 1$  は変です。

T：ほお・・・、どこがおかしい？

D 君： $x = 1$  を方程式  $\sqrt{x} = x - 2$  に代入してもなりたちません。

T： $x = 1$  を、方程式の左辺に代入すると

$$\text{左辺} = \sqrt{x} = \sqrt{1} = 1$$

右辺に代入すると

$$\text{右辺} = x - 2 = 1 - 2 = -1$$

本当だね・・・等しくなりませんね。

中学校のとき、2次方程式を勉強して (1) のような方程式は解くことができるようになりましたね。

みなさん、(1) のような問題については A 君が解いたように書いてきました。そうして答えがあていれば○をもらってきましたね。

でも (2) のような方程式について同じように解いてみたところ答えにならないものが混じっていました。

これはどのように考えたらよいのでしょうか？

## 2 「方程式を解く」とは・・・

さて、みなさんは2次方程式を解く問題では、最後は上の解答のように

$$x = 1, 3$$

と書いてきましたが・・・ここで質問です。

質問1： $x = 1, 3$  の「,」はどういう意味でしょう？

A 君：そんなこと考えたことない！

B 君：「または」・・・かな？

C 君：そうかぁ・・・「または」か・・・

D 君：「または」に決まりだな・・・

それでは、そこを考えていきましょう。  
 問題文の最後は「方程式を『解き』なさい」ですが、  
 「方程式を解く」  
 とは、何を意味しているか、中学校の教科書には明確に書かれています、みなさん覚えていますか？

● 「方程式  $f(x) = 0$  を解く」とは  
 「方程式  $f(x) = 0$  をみたく  
 全ての  $x$  を求める」こと

これが「方程式を解く」ということの定義ですから、この定義に従って答案を作るとすると、答案の最後は  
 「 $x = 1, 3$  が方程式をみたく  $x$  で、  
 これ以外ない」  
 とならなければなりません。  
 中学校で勉強した答案のなかに「これ以外ない」の部分はどこにあるのでしょうか？

### 3 「方程式を解く」ために どのような考え方をしたか

「実は方程式を解く」ときに使った考え方は問題解決のための極めて強力な考え方なのです。「方程式を解く」だけでなくいつも意識してほしい手法です。あらためてここで勉強しましょう。

**攻略法 1** ○○を求めたいときは  
 $X = \text{○○}$ として、  
 もしも○○だったら・・・  
 と考えて  $X$  のみたく条件式をつくる

「方程式  $x^2 - 4x + 3 = 0$  を解く」ということは「 $x^2 - 4x + 3 = 0$  をみたく  $x$  を、すべて求める」ことでした。「 $x^2 - 4x + 3 = 0$  をみたく  $x$ 」を求めたいのですから

**もしも  $X$  が**  
 $x^2 - 4x + 3 = 0$   
**をみたくすると・・・**

と考えます。  
 もしも  $X$  が方程式  $x^2 - 4x + 3 = 0$  を満たしていると仮定すると・・・  
 $X^2 - 4X + 3 = 0$   
 が成り立ちます。

$X$  が何になるかを知りたいので、方程式の左辺に  $x = X$  を代入した  $X^2 - 4X + 3$  の値が 0 になるのはどうい

うかを調べたいのです。  
 $\text{○} = 0$  となるかどうかを考えるときには  
 $\text{○} = \text{●} \times \text{▲}$   
 というように調べたい  $\text{○}$  を「積の形」にできないかを考えるとうまくいくことが多いようです。  
 $\text{○} = \text{●} \times \text{▲} = 0$  であれば 「  $\text{●} = 0$  または  $\text{▲} = 0$  」

という結論することができますね。  
 今の場合  
 $X^2 - 4X + 3 = (X - 1)(X - 3) = 0$   
 という因数分解ができるので、これから  $M \quad X - 1 = 0$   
 または  $X = 2$   
 となります。  
 $X - 1 = 0$  となるのは  $X = 1$   
 $X - 3 = 0$  となるのは  $X = 3$   
 というわけで、  
 もしも  $X$  が解だとしたら  
 $X = 1$  または  $X = 3$  である。  
 ということがわかりました。

### 4 逆は必ずしも真ならず

「もしも  $X$  が解だとしたら  
 $X = 1$  または  $X = 3$  である。」  
 ということがわかったので。  
 「答えは  $X = 1, 3$  である」  
 といっているのでしょうか。  
 サスペンスドラマでは、番組が始まるとする事件がおきます。そして事件現場にいた何人かの人たちについて聞き込みをしたり捜査をしたりして、犯人を捜します。番組の最後は、「犯人はあなたですね。」となって犯人が事件の背景を述べる・・・というのが定番です。

もしも  $X$  が犯人だとしたら  
 $X$  は事件現場にいたはずだから  
 事件現場にいた人・・・アリバイのない人・・・が犯人かもしれない人として捜査の対象となります。アリバイのない人・・・犯人かもしれない人の中には無関係の人もある可能性があるわけです。

最初の問題の (2) では  
 もしも  $X$  が  $\sqrt{X} = X - 2$  を満たしていると  
 両辺を 2 乗して、  
 $(\sqrt{X})^2 = (X - 2)^2$   
 $x = x^2 - 4x + 4$   
 $X^2 - 5X + 4 = 0$   
 $(X - 1)(X - 4) = 0$   
 より  $X = 1$  または  $X = 4$

となります。この最後の「 $X = 1$  または  $X = 4$ 」という結論は

もしも  $X$  が  $\sqrt{X} = X - 2$  をみたしていれば

$$X = 1 \quad \text{または} \quad X = 4$$

ということであり、 $X = 1$  だったら、 $X$  が  $\sqrt{X} = X - 2$  をみたしているのか、と  $X = 4$  だったら、 $X$  が  $\sqrt{X} = X - 2$  をみたしているのかということになると何も言っていないのです。

A ならば B である  
と

B ならば A である  
とは異なる文ですよ。

この場合、 $X = 1$  は  $\sqrt{X} = X - 2$  を満たしていません。「もしも  $X$  が  $\sqrt{X} = X - 2$  を満たしていると仮定すると」から始まる議論から得られた「 $X = 1$  または  $X = 4$ 」という結論で大事なことは

$X$  は 「 $X = 1$  または  $X = 4$ 」以外ではありえないということだと考えるのがポイントです。

もしも  $X = 1$  以外だったら、 $X - 1$  は絶対0にはならないし、 $X = 4$  以外だったら  $X - 4$  は絶対に0にはなりません。したがって、 $X = 1$  でも  $X = 4$  でもないときには、 $\sqrt{X} = X - 2$  を満たすことは絶対にないということが分かったのです。

そのうえで、 $X = 1$  をために代入してみたら これは解ではないということがわかり

$X = 4$  を代入してみると

$$\text{左辺} = \sqrt{X} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{右辺} = X - 2 = 4 - 2 = 2$$

より、左辺 = 右辺 が成り立つことがわかります。したがって、

$X$  は 「 $X = 1$  または  $X = 4$ 」以外ではありえないさらに

$x = 1$  を代入してみると

$$\text{左辺} = \sqrt{x} = \sqrt{1} = 1$$

$$\text{右辺} = x - 2 = 1 - 2 = -1$$

より、左辺  $\neq$  右辺 であることがわかる。

以上より、 $\sqrt{X} = X - 2$  を解くと

「 $X = 1$  または  $X = 4$ 」以外ではありえなくて

$X = 1$  は解ではなくて、 $X = 4$  は解なので

$\sqrt{x} = x - 2$  をみたす  $x$  は、 $x = 4$  だけ である。  
という結論になります。

「(1)  $x^2 - 4x + 3 = 0$  を解け」の答えはどうなるか考えてみましょう。

答案

もしも  $X$  が解だとしたら

$$X^2 - 4X + 3 = (X - 1)(X - 3) = 0$$

より  $X = 1$  または  $X = 3$

つまり、解は「 $X = 1$  または  $X = 3$ 」以外にはありえないことがわかり

$X = 1$  を代入すると

$$\text{左辺} = X^2 - 4X + 3 = 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 0 = \text{右辺}$$

$X = 3$  を代入すると

$$\text{左辺} = X^2 - 4X + 3 = 3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 0 = \text{右辺}$$

となり、 $X = 1$  も  $X = 3$  も解となる。

以上より、「方程式を解きなさい」=「方程式をみたすすべての  $x$  を求めなさい」に対する最終的な答えは

$$「x = 1 \quad \text{と} \quad x = 3」$$

となります。

(1) 「もしも A だったら B である」  
という文章に対して

(2) 「もしも B だったら A である」  
という文章は同じことではありません。

(2) の文章は (1) の文章の「逆」といいます。

(1) が証明されたとしても、(1) と (2) は別の文章なので、(2) は正しいとは限りません。

このことを

**「逆は必ずしも真ならず」**

といいます。

## 5 まとめ

中学校のときに方程式を解くことを勉強をしましたが、みなさんは自分が解いた結果の数値があるかどうかだけに注目してきました。正しい結論をえられるように、どうすれば結果がでるかという「解き方」を覚えてきて、その結果正しく解けるようになってきましたが、忘れてしまった大切なことのなんと多かったことか。

残念なことの一つには、「方程式を解く」ことの意味を理解しないまま、形式的に計算をして答えをそれらしく書いてきたこと。そして、それに○をもらって安心してきたこと。

さらに重大なこととして「方程式を解く」ために用いられている「数学的な考え方」を意識しないでいることです。「・・・もしも○○だとしたら・・・と考えること」は、数学を考えたときには「まず、必要条件から攻める」という大切な「攻め方」であり、これは数学以外の場面でも使われていることです。これから数学を学んでいきますが、色々な場面でこの「攻め方」を使っていきます。

（「必要条件」についてはこれから数学の教科書でしっかり学びましょう）

さらに、答えが出ればよい・・・あるいは、解き方を覚えればよい・・・という安易な態度が、物事を「きちんと考える」という大事な姿勢を身につけることを妨げているかもしれない。「こうすれば答えが出る」と思って覚えた解き方が、きちんと考えないと答え以外のものまで出る危険がある解き方であったことは、注意しなければなりません。

さらに、「因数分解」という式の変形が、「値が0になるかどうか」を調べたいときに役に立つ技法の一つであること、因数分解することによって2次方程式を解かなければならないところ1次方程式を解けばよくなるというように、困難を克服するのにも役に立っているという経験は、他の場面でも思い出して試してみたい技法の一つであるという教訓を心に刻むことも大切です。

以上、これから始まる高校の勉強をするうえで大切な指針となるのではないのでしょうか。

## 6 生徒感想

●今まで9年間受けてきた算数・数学の授業とは全く違う時間だったのですごく新鮮だった。とくに一番最初の授業で、今まで私たちがやってきた算数・数学はいったい何だったのだろうとショックを受けた。教科書に載っていること以外の身近なことについて考えてみるのはおもしろかった。だけど、周りの人が思いついているのに私だけわからなかったり、周りとお話をするときになかなか考えを共

有することができない（とくに最初のほう）のは苦しかった。こういう学校に入学して生徒になったからこそ受ける機会のある特別な授業だと思うし、この機会があるからこそ周り自分をテスト以外で比較し実力レベルを感じることができて良かった。また、9年間「授業は静かに受けなさい」とか「周りとは指示があるまで話をしないように」と言われてきたからこそ、自由にいつでも周りとお話をしようというのは少しびっくりしたし、まだ慣れていない。コロナの流行により休校になった分授業がおくれてしまったので、しばらくお楽しみ会（探究の時間）はないが、普通の授業や家での学習の中で学んだことをいかし、またお楽しみ会がスタートしたら次は周りの人と考えを交流して自分の力を高めていけるように頑張っていく。

●各回、授業で名言のようなスローガンがあり「こう考えれば良いのか」と納得させられる。周りの人が積極的に意見を言い合ったり、正解を導く方法に気付いているのに、自分は全然理解ができていないときに不安になる。先生の説明や、周りの人の様々な考えを共有できて「こんな考え方があるんだ」と気付く事もでき、とても良い時間だと思う。周りの人と考えを共有できたり、話し合う時間が与えられて今まで話したことのなかった人とも話せるようになったり、考えるようになり、自己のレベルアップにも繋がっている。また他の教科でも、この探究の時間で身につけた力を応用できていると思う。この授業は普段の学習につながる考え方を多く学べ、とても大事な時間だと思う。内容は難しいですが、学ぶことの多い授業なので、これからもよろしくお願いします。

●自分には数学的な考え方が浸透していなく、出てきた答えがどうしてそうなるのかなどを考えていなかったんだなと感じました。最初の授業では、方程式の解き方についてより深く学べました。ただ解けとあって、公式などにあてはめてやっていたけれど、その問題の意味まで読み取れていなかったということを知りました。

●どのような授業かなと楽しみにしていた。実際に授業を受けてみると、頭を使うことが多く、数学の奥深さを学ぶことができて自分はとても面白いなと思った。私は頭の柔軟性がないので、この授業をバネにして応用力と柔軟性を身につけようと思った。最初は、因数分解についてだった。その授業では因数分解の解が必ずしも正しい物ではなく、それを確かめるための式も高校では重要になり、答えも大切だが、答えを導くまでの式が最も大切ということが分かった。

●一番最初の授業では、中学校で学んだことをそのまま使っても解けない方程式で、そのときの授業で初めて数学が面白いと思いました。自分は小学校の時は勉強がとても嫌いで特に算数は嫌いでした。しかし中学に入学してテストで順位が出ると知って勉強していたら数学の点数が高

て、数学が自分の得意教科、好きな教科なんだと思っていました。しかし、それは数学が好きなのではなく、ただ少し点数が高いがためのものだったということにも、最初の授業で気づきました。

●探究の時間では、中学で教えられたことをそのまま使っている解くことのできない問題があり、それがとても興味深く、おもしろかった。僕は小学校のとき算数が好きで、分からない問題に出会ったときにとてもワクワクしていたりその問題を解くことによってとてもスッキリし楽しく感じていた。そういった感覚は、中学校で数学を学んでいた中ではあまり感じなかった。小学校の時に感じた感覚と似た感覚を探究の時間で感じることができ楽しかった。

●私は数学は比較的好きなので探究の授業は楽しく受けさせていただきました。最初の授業では、方程式について出てきた解が本当に本当なのかという過程を我々がスキップしていることが分かりました。

●正直言うと始めはまったくもっておもしろくなかった。授業ごとの問題を考えてもなかなか分からず、最終的には問題の解答を少しだけしか話されず、むずむずして授業を終えていた。しかし、最近あることに気付いた。この授業は難しい問題を解くのが主ではなく、その解をどうやって導くのか、また、テストでそのような難問に出会ったとき、どう対処するかを学ぶことがこの授業の本質的な部分だということに。

●この授業を受けるまでは授業の受け方や問題への取り組み方、問題の意味を分かっていたいなかったり、ちゃんと理解することは出来ていませんでした。しかし、この授業を受けたことで以前より取り組み方が変わりました。

●最初の授業で行った「方程式を解く」というのも今までスルーしていたところが実は重要だったし、 $x=1, 3$ という書き方は1と3なのか、1または3なのかというところとか。これからは問題を解き終わったら一度じっくり自分の解答を見直して疑問に思ったことやこれがこういう結果にならなかつたらなぜだめなのかということ自分を友達と考えるようにしていきたいです。

●私は今まで数学は当たればいいと思っていました。中3になると受験への意識が高まり、ただ公式を覚えて問題を解いていました。高校に入り、数学の時間に探究の時間があると聞いてとても興味を持ちました。この授業を通して、数学は答えが当たればいいのではなく、どうしてこうなるのか？他に方法はないのか？などの疑問を持ち探究していくことが大切だと言うことを知りました。今振り返ってみると今まで私は数学の力、考え方ができていなかったし、足りなかったなと思います。

●「探究の時間」の1時間目では方程式についての授業でした。今まで方程式を解けという問題が出たら、何も考えずただ方程式を解いているだけでした。「方程式を解け」と

いう問題は、方程式をみたま  $x$  を全て求めることとだということを知りました。

●1時間目は方程式についてだった。「方程式を解く」とは？と考えてみて「方程式を満たす  $x$  をすべて求めること」だと改めて理解したとき、言葉の意味や定義の重要性がわかった。また式で表して解いていくと、機械的に解を求めることができるので、式の便利さも感じた。

●1時間目の授業では、分かった気になっている自分に気づいた。「方程式を解く」とはどういうことなのかもよく知らずに、ただ機械的に解を求めてきたのだと気づいた。中学校の頃まで数学は計算できさえすればそれ良いという気持ちがあって、習った語句も特に復習したりすることはなかった。それではこの先解けない問いも出てくるだろうし、数学だけでなく、他の教科や普段の暮らしでも、よく意味は分からないけれどただなんとなくやってみる、みたいな姿勢が続いてしまうと思った。だから語句を調べたり教科書に出てきた語句をまとめたりするようにした。

●自分は、数学の授業というものは、難しい式やワケがわからない記号を使っているものだという認識がありましたが、この探究の時間を通して、少しだけイメージが変化しました。

この授業は文字とかについて考えるのではなく、与えられた情報をもとに、それを推理するような考え方でした。自分はずっと数字をいじっているよりも、そうやって考えた方が楽しいと思いました。たとえば一番最初の授業の内容で、自分は当たり前だと感じていた物に対して深く考えるような内容だったので、もう少し深く物事を疑いながら考えるようになりました。

●「～しよう」という問題に対して、「～する」とはどういうことか？と考えることが大事と知った。この考え方は、これからとても使えそうだった。数学に限らず、問題の大小などにかかわらず、日常生活や社会にでたときに問題が発生したときに、この考えを使えると思った。だからとても便利な考え方をすることができて良かった。

私は数学での応用問題で、何から考えていいか分からず、ペンが止まってしまって解けないことが多い。けれど、そういうときにどう考えたら良いか分かったので、応用問題とぶつかったときも、ずっとずっと考え続けていけそう。そして、自力で解ける問題が増えそう。また変化しているところと変化していないところを見つけるという考え方も良いことを知ったと思った。応用問題は解答を見ると、ひらめくかひらめかないかの運勝負のように感じるが多かった。この考え方を使えば、ひらめくことが多くなるなと思った。応用問題も実力をつければ解けるんだなと思った。

●この授業を通して、今まで自分が考えたり捉えたりしていた数学は難しいと思っていたが、少し簡単そうだと思う

ことができるようになったと思う。考える時間が多くあることで、友達との会話の時間もとれ、そこから問題解決につながるが多くなった。考えるときに、一人でやる時間も必要だと思うが、家ではなく友達がすぐ周りにいるので、分からない所を互いに教え合ったり、話し合ったりして意見を共有したい。

最初の授業で、方程式を解くとき、 $\sqrt{\quad}$ がついている式に少しとまどいがあったが、 $\sqrt{\quad}$ は2乗すると消えるという性質を使って解くことはできた。しかし、解いた答えは代入したときに成り立たないことに気づかず、間違えてしまった。「方程式を解く」とは、方程式を満たす  $x$  をすべて求めることなので、代入して解いた解を確かめることが大切だと思った。「逆は必ずしも真ならず」この言葉が印象的だった。

●最初は何をするのかわからなくて不安でした。今も毎回授業で何をするのか少し不安です。普段の数Iより難しいし、僕はあまり好きな授業ではありません。でも教科書に出てこないような考え方も大切なのかなと思います。いつもより頭を柔らかく使うし、それがいつもとはまったく違う問題なので、僕もだし他の人も驚いているようでした。この授業でやる内容は応用すれば他教科や勉強以外の事にも使えるような気がします。

普通の数学とは直接的なつながりはないようですが、普通の授業でも少しずつその考え方を使えるところもできているし、この授業だと、より生徒主体で考える授業なので、より考えも深まるし、他の人の意見も聞くことができ、自分とは違う考えを共有することができるのがいいなと思いました。

このような形態の授業はこれまでほとんどしたことがないので上手く自分の中に落とし込められるか不安ですが、なんとか理解して活用していきたいです。