

# 1年数学 探究の時間0 考え方を考える

2020年4月

## 1 数学の授業は・・・

### 1.1 生徒の声

#### ●生徒の声1 (数学を苦手とする生徒)

私は小学校の時点で算数が苦手で、中学校に入学してからも一番苦手なのは数学でした。暗記は得意な方なので、公式を覚えて計算したり、図形の面積、体積を求めたりなどはできたので、なんとか中学生の頃は得意な部分で点数をとることができました。私が本当に苦手なことは、端的に言うと「深く考える」ということです。また、文章を読み取る力が欠落しています。私は今まで、深く考えて解く問題を捨てていました。他の部分でカバーすれば良いと考えていたためです。高校受験の時もそうです。過去問であった深く考えて答えを導く問題は諦めて、前半の大問7?あたりまでを完璧にする作戦で受験勉強をしていました。それが良かったのかはわかりませんが、めでたく一関第一高校に受かることができました。

#### ●生徒の声2 (数学を得意とする生徒)

今まで私が学んできた数学は、知識と経験を活かして問題を解くだけだった。青チャートの問題を解くにあたって、例題を読んで解答の構造を理解し、練習問題を使ってそれを確かめる、知識を得るための勉強だった。それでも、解くことができて仕組みを理解したと考えて満足していた。

・・・ 中略 ...

高校数学では、ただ青チャートから解法を学び詰め込む演繹的な解き方をすることが多くなったと思う。2次関数などは、特に問題を理解するという点で、分かっているのは軸の方程式と頂点の座標、y切片から・・・という型にはめていく解き方になっている。

### 1.2 授業は・・・

数学の毎日の授業は、具体的な事象をもとにして、新しい概念や技法を、その必要性を理解しながら、定式化して

いき、その後、練習問題を考えることになります。その練習問題は、その直前に学んだ新しい概念や技法を確認するためのものであり、定義にしたがって、数値を代入して確認するものとなります。少し進むと、「例題」があって、これまで学んだいくつかのことを繋げて考えなければならぬ問題が現れます、「応用問題」よばれる類の問題です。新しいことを学ぶための問題設定場面がそれ以前の授業で考えてきた場面と関連があることが多く、改めて何が問題になっているかきちんと確認することをしなくても自然に考えることができることがほとんどとなります。定義したばかりのことなので、ただ問題に登場する数値のどれをどこに代入するかをちょっと気をつけるぐらいでできてしまいます。

そういう状況が続いていく中で、指導者がそういう気持ちになっていなくても、生徒にとっては、授業とは、その「解き方」を覚えて、異なる数値を代入してもできることを確認する時間となります。

本校のような「進学校」では、中学時代にテストで優秀な成績をおさめてきた生徒が集まり、高校卒業後に進学することを希望する生徒たちです。3年生になると、受験準備のために高校で学んだことを復習する演習問題を解くことが主となり、しっかりと復習できるように、早めに高校3年間分の教科書を学習してしまうような計画にしたがって進みます。

上述のように、新しく学んだ概念について繰り返し考えるというよりは、学んだ「解き方」のとおりやってみるだけの学習となります。「未知の問題を考える」という過程を経験するよりは学習した「解き方」をやってみることを繰り返す中で、本来は問題演習を通して数学的な概念や技能に習熟するべきところを、単なる「適用練習」だけで授業をどんどん進めていくこととなります。どんどん進む授業に追いついていくために、練習問題を解くときに、「問題を解決しようとする」のではなく、「解き方を覚える」「覚えた解法を使ってみる」作業だけになってしまいます。

### 1.3 できれば好きになる

学習の過程で、練習問題が解けると、数学が好きになり得意だと思ようになります。数学が不得意な生徒に対して、数学学習のモチベーションを上げるためには、問題を解けるようにすることである・・・と考えることもありうると思います。

数学教員としてそのように思うと、生徒ができるようになってほしいと、学習する単元のポイントを押さえた良い演習問題セットを用意して解けるようになるまで演習を繰り返して、そのような演習問題のセットだったら解けるようにしてあげたい考えるようになるでしょう。

しかし、どうしてそのような解法を考えることができるのだろうか？と疑問を持つ子たちも、どんどん進む授業の中で、「考える」ことを諦めて、解き方を覚えて、練習問題が解けたという快感だけを求めるような勉強になっていきます。

それを繰り返していくうちに、解法を忘れてしまうと解けないということになる。予習・復習をしかかりとして授業の内容を理解できた生徒は、校内の試験では良い成績をとることができるようになるでしょう。しかし、それは指導する教員が用意した「できるようになってほしい問題のリスト」にあるような問題群に対してだけのものになることになります。そもそも、未知の問題の解法を探るような経験もせず、ひたすら解法を覚えることをしてきた子たちが、授業で教わった問題とは異なる「初めてみる問題」に対して、その問題を解決するために少しでも有効なアプローチができるようになるのでしょうか？

「できる」ことによって数学が好きになった子たちも、考えることもできない状態では「できない」から「きらい」になっていくこととなります。

## 1.4 先生は「考え」ているか？

生徒たちが「できる」ようにするために、効率良く問題を解く経験を積ませるために用意された授業の中では、生徒たちに「考える」余裕を与えることなく、解法を「覚える」ことが数学の学習であるという誤解を植え付けていくことになっています。

そもそも数学を教えている先生たちは、そのようにして「解き方」を覚えて解けるようになっていった人たちが多いでしょう。学ぶべき「解法」は、自分たちが生徒のときに、こうやって解くものだと教わってきたことでしょう。どのようにしてその解法となったのか、どうしてそのように解くのか、無批判にそういうものだと指導されてはいないのでしょうか？

十分な時間をとり、解くべき問題のゴールを見て、適切なアプローチを選択してはそれを試してみて、うまくいったりうまくいかなかったり・・・という試行錯誤する先生の姿を生徒たちに見せてみることや、そういう経験をふまえて子どもたち自身が試行錯誤する経験を積んでいくことを組織することを考えているのでしょうか？

## 2 考え方を学ぶ授業を

一つひとつの例題が解けたとしても、学習している単元全体でめざした問題解決のための「数学的な概念・技能」に対する理解はできていないことが多いし、多少解けない問題があったとしても、めざすポリシーは了解することも

よくあることである。だとすれば、「練習問題ができるかどうか？」を目標とする授業というものを考え直すことも必要に思います。

「未知の問題を、なんとかして学習した数学の知識と結びつけるられないか？」をいろいろ試してみるアプローチの仕方を学ぶことを目標にする授業があってもよいのではないのでしょうか。

## 2.1 何をもって「考え方」とするのか

有名な、ポリアの「いかにして問題をとくか」(G. Polya 著 柿内賢信訳 「いかにして問題をとくか (How to Solve It)」1975/4/1 丸善出版) から始まる、数学の問題の「発見的な解き方」を研究する「発見的思考」について多くの研究がある。

「問題を解く」ということは、スキーやピアノを習得する時と同じように、模倣と実習から始まるひとつの実技だと考えられます。その実技を体系的に整理する試みが進められているようです。そのようなものを目にするとき、例題として取り上げられる、解決しようとする問題がかなり高度であり、中学生や高校生の多くが学ぶ題材として二の足を踏むような問題が多く、実際の授業で扱いにくくなっている。そこで、生徒たちに適した、考えやすい題材を開発することとしました。ポリアの前述の書では、「発見的な方法」をかなり体系的にまとめてあり、他書でも大体同様のまとめ方となっています。ポリア本人も著書の中で述べているように、この「発見的な方法」は完成版というわけではなく、これを基にして問題解決を繰り返しながら、自分自身の中に発見的な考え方を作っていく必要があるとあります。

そこで、完全な「考え方」を目指すというよりは、暫定的な「考え方基本セット」を取り上げて、それを使いながら「問題解決技法」に磨きをかけていくという方向を考えました。

以下に、これから始まる「考え方」の学習の「基本セット」を挙げてみましょう。

## 2.2 問題の理解

解決すべき課題が与えられたとき、いっしょに考えるグループ内でまず確認すべきことは「何が目標になっているか」ということです。課題が「○○をせよ」であるとき、「○をやる」とは「□□をやる」とこと「△△をやること」・・・というように、やるべきことをできるだけ具体的にすることが大切です。

## 2.3 探索活動(1)・・・まず具体化!

解決すべき課題が具体的に理解されたとしても、問題となっている状況で起こっていることが具体的に捉えられるようにすることが重要です。

非常に簡単な場合だとどうということが起こるか?

とても特殊な場面だと何が起こるのか?

問題の状況を図に描いてみる

など、実際に手を動かして問題の状況を「具体化してみる」ことが大切です。

## 2.4 探索活動(2)・・・見えてくることから・・・?

与えられた条件から目標に向けてどういう手段で解決の手立てを考えるか、そのために、自分で解決できるように問題を簡単にしてみたり、こうなっているのではないかとという仮説を設定したり、それを確かめるためにどうという実験をしたらよいかなどということグループで作戦をたてることも大切です。

また、謎を解くために有効な考え方もあります。シャーロックホームズや名探偵コナン君がどのように考えて犯人に近づいていくのか、その考え方に学ぶべきことがあります。

基本的には、もしも目的を達成されるのなら、そのためにはどのような条件がクリアされなければならないかから考えることとなります。数学的にいうと、「まず必要条件から」考えるということです。

必要条件が満たされるためにゴールから逆算的にこうあるべきだと考えていくことや、そのためにいろいろある道筋と道筋を、与えられた条件を用いるばあいに、どちらが有利であるかを「評価」したりして、問題解決過程全体の計画を考えなければなりません。また、論理的に推論するだけでは謎はとけません。その場の状況から、「こうなっているのではないか?」という推理もしなければなりません。論理的には正しくないかもしれませんが、そういう推理でしか新しいことが見えてこないことがあります。

## 2.5 メタ認知的立ち位置

がむしゃらに問題解決のゴールに向かって何かをするだけでなく、そのために何をしたらよいか? 何をしようとして失敗したときに、その失敗の理由を考えて、さらに次の手を考えたり、問題を考えている自分を、上の立場から俯瞰する自分を作ることも学びたいことです。

## 2.6 思考錯誤の経験を積む

ポリア自らが書いているように、「発見的方法」の完全なリストをつくることよりも大切なこととして、とにかく問題解決の経験を積むことが大切でしょう。問題のパターン練習という従来の大量演習型の学習とは一線を画する、多様な思考錯誤の経験のための問題のセットを準備するというのも大切でしょう。

## 3 実際の指導

本校では、教育課程上、数学I(3単位)数学A(2単位)数学II(1単位)が設定されていて3科目並行して授業するわけではないが、時間割上では年間通じて週に6時間の数学の時間がある。その中の1コマを使って「探究的な学習の時間」として「考え方を考える」授業としました。この特別の時間以外の普通に教科書を進む時間もそれぞれの場面で「探究的に学ぶ」のは当然のことではあるのですが、その各場面で登場するいろいろな「考え方」を一本筋を通した体系としての「考え方」を扱おうとしたものです。

各課ごとに一つの課題を与えて、それをグループで考えることとしました。生徒が考え議論している中を、学年の教科担当が見守りながら適切な助言をしていき、さらにその課で学んで欲しいことを取り上げて説明するというかたちで1年間実施したものです。

生徒たちの議論の様子を生徒の会話の形で記録していききました。

### 3.1 1年間の指導テーマ

1年間に扱ったテーマは次のとおりです。

- 第1講 方程式を「解く」とは
- 第2講 三角形から折り鶴
- 第3講 ハノイの塔
- 第4講 平面分割
- 第5講 砂の幾何学
- 第6講 電卓の不思議
- 第7講 正多面体ってどんだけ～?
- 第8講 正十二面体切り出し
- 第9講 ケーニヒスベルグの橋渡り
- 第10講 正十二面体一周

## 3.2 問題解決のためのスローガン

第2節であげた、「何をもって「考え方」とするのか以降に掲げたそれぞれの項目について、実際の指導事例との関係について述べましょう。

### 3.2.1 最初は Goal !

問題解決を目指してまず最初にするのは最終ゴールが何であるかを確認することでした。ちょうどこの授業が始まるころに、コメディアン志村けんさんがなくなりました。じゃんけんをするときに「最初はグー」と始めたのは志村けんさんで、それ以前にはそんなことはいわなかったと思いで話をしながら、みんなの合言葉として

「最初は Goal !」

というスローガンを掲げました。

このスローガンはこのときから普通の授業でも使い続け今に至っています。

問題文にある通りを Goal と思ってもいいのですが、第1講では、「方程式を解く」ということの定義を中学校の教科書をひっくり返して確認しました。言葉の定義をしっかり確認することも併せて掲げました。

第2講では目標とする Goal をより具体的に把握するという注意も加えました。

### 3.2.2 まず具体化 !

解決すべき現場の状況を理解することが次にすべきこととしました。そのためには、できるだけ簡単な場合・具体的な場合を思う浮かべることとしました。

★ $n$  といったら  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots!$  なにをしたらよいかよくわからなくても、とりあえず「 $n$  といったら  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots!$ 」を合言葉にして、登場する文字  $n$  があったら、最も簡単な「 $n = 1$  の場合はどうなるだろう?  $\dots$ 」「 $n = 2$  の場合はどうなるだろう?  $\dots$ 」とやってみることを提唱しました。

★たとえば  $\dots$  変数  $n$  が登場しない問題もあります。そんなときには「たとえば  $\dots$  どういうこと?」と口にだして行ってみましょうを合言葉としました。

★問題を簡単にしてしまう 問題が難しいと思ったら、より簡単な状況で、これなら自分で考えられる  $\dots$  というように、与えられた問題の条件を「簡単にする」ということも大切でした。

### 3.2.3 もしもボックス !

問題の Goal を確認し、具体的に何が起きているかが少しわかったら、「もしも Goal」から眺めたら何が見えるだろうか? と考えましょう。これは数学者もやっていることです。カッコよくいうと、考え始めは「まず必要条件から」ということになります。目標の Goal から逆算的に筋道を考えるということは、ぜひ意識してできるようになってほしい考え方です。

## 3.3 探索活動 (1) の注意

求める最終的な Goal を理解して、考えずらい時にはより簡単になるように条件を変えたりして、いよいよ考え始める時、次に来る「探索活動」の中で最初にするのは「現場をよく見る」こととなります。実験してその結果を見たりするときの注意でした。解決すべき現場の状況を理解するために、目の前にある実験結果をどのようにみたら良いか、その観察の仕方の注意もしました。(第3講・第4講)

### 3.3.1 結果の数値だけではなく

・・・理由も考えよう!

「ハノイの塔」も円盤が1枚のとき、2枚のとき  $\dots$  と実験を進めて行ったとき、どうしても何回かかったかという結果の数値だけに注目しますが、その数値の動きの理由も考えるようにしたいものです。

### 3.3.2 結果の数値だけではなく

・・・変化の仕方に注目!

結果の数値の「変化」に注目することを注意しました。その理由を考えるときにも、変化した部分に注目したり、変化しなかった部分に注目したりするという、両方同等に注目するということを注意しました。

## 3.4 探索活動 (2) の注意

「現場をよく見る」ことからすこしずついろいろな事実を発見することになりますが、その次の段階で、さらに問題の本質に迫るための注意もあります。

### 3.4.1 結果の影響を与える要因を見つける

実験結果に影響を与える要因を見つけましょう。これかなと思ったら、その要因があるときないときで違いがおこるか、実験の仕方を計画して新たに実験をしてみます。(第5講・第6講)

### 3.4.2 仮説を立てる

実験の結果見つけた現象や規則性についてその理由が思い浮かんだ時には、それを確かめるような実験をしたり、「証明」を考えたりします。そのためには、解決すべきことの周辺で起こっていることについて多面的な理解が必要となります。その思い浮かんだ理由を「仮説」として仮定したときに何が起こるかを実験で確かめたり思考実験したりすることになります。(第5講・第6講義)

### 3.4.3 「見る」こと

図形の問題を考える時には「図を描け!」ということはよくあります。しかしポーッと見ていると何も見えてきません。「見る」ときの注意として、「見る」ための焦点を決めること、何かに注意して見ることの二つを学びました。第7講では、多面体の要素として、面・辺・頂点がありますので、一つひとつの要素について「見る」と決めて「見ます」。たとえば頂点についてしばっているいろいろな多面体を「見て」みると、そこに多様性を発見できました。また第8講では、ゴールから逆算して考えて、並行な辺があるはずだ・・・というような「必要条件」から「見る」観点を決めることによって「見えて」いなかった事実が浮かび上がってきました。

### 3.4.4 可能性をシラミつぶしに検討する

考えられる可能性について、すべての場合を一つひとつシラミつぶしに調べるといふ姿勢も大切です。それは膨大な捜査作業となるかもしれません。グループで考えるための注意も学びました。(第9講)

## 4 生徒の変化

第10講は1年間のしめくくりの問題として用意しました。生徒たちは自分で議論の方向を決めてどんどん調べていくようになりました。グループに別れても、隣のグループと情報交換しながら考えて行きました。教員は、いいことをやっているグループについては、全体に紹介したりはしましたが。

## 5 その後

1年間の授業については、そのつど生徒から感想を書いてももらっています。このような時間を経験しながら、教科書を学ぶ普通の授業のなかでも、ここで学んだ考え方を引用しながら、「発見的に」数学を学ぶようにすることがで

きました。

1年間のこのような取り組みに対する生徒たちの反応は、とても好意的であり、この生徒たちが2年生になり3年生になっても、週1時間の「考え方を考える授業」は継続して行うことになりました。

2年生では、1年生で学んだ手法を利用した教科書にある有名な問題を、「解き方を学ぶ」というのではなく、どうしてそのような解法を考えるといいのか・・・ということを目標として、1時間に一つの問題をじっくりとグループで考えるようにしました。3年生になると、より実践的に入試問題を題材にとり、同様に「解き方を考え出す」授業を続けることができました。

3年生になると、業者の模擬試験をすることが多くなりますが、記述型の模試において、何も手をつけることができず白紙の答案用紙を提出する生徒が、例年に比較して格段と減少するという嬉しい結果となりました。

## 6 文献

- (1) G. ポリア (G. Polya) 著 柿内賢信 訳 「いかにして問題をとくか (How to Solve It)」1975/4/1 丸善出版
- (2) L. C. ラーソン 著 秋山仁 訳 「数学発想ゼミナール (Problem Solving Through Problems)」シュプリンガーフェアラーク東京 1986/1/1

