

様々な関数の拡張とその可視化

岩手県立一関第一高等学校理数科 3 年数学 2 班
菊地晴之 菅原夏樹 千葉尚士

要約

私たちは、様々な関数を複素数まで拡張し、それらのグラフの作成や指数関数の拡張における図形的意味を考察した。その結果、すべてのグラフにおいて実数の範囲での関数との共通点が見られた。また、指数関数において実数の範囲と異なり、指数によってのみで変化の度合いが定まらないことが分かった。円を変換すると \sin , \tan では円がひょうたん型になり、 \cos , 指数では円の形を保った状態で大きさや位置が変化した。

<キーワード> 指数関数 三角関数 複素数 オイラーの公式 複素関数 グラフ化

ABSTRACT

We extended various functions to the complex numbers and considered their graphs and their graphic significance in the extension of exponential functions. As a result, we found that all graphs have something in common with functions in the range of real numbers. We also found that, unlike the range of real numbers, the degree of change in an exponential function is not determined solely by its exponent. When the circle was transformed, the circle became gourd-shaped in sine and tangent, and the size and position changed while maintaining the shape of the circle in cosine and exponential functions.

1 はじめに

以下より特に断りがない場合 a, b, c, d は実数を表し、 i は虚数単位、 e は自然対数の底とする。また、 w, z は複素数とし、 $\arg(z)$ は z の偏角（断りがない限り $[0, 2\pi)$ の範囲で考える）、 $|z|$ は z の絶対値、 $\operatorname{Re}(w)$ は w の実部、 $\operatorname{Im}(w)$ は w の虚部をそれぞれ表す。 \sin は正弦関数、 \cos は余弦関数、 \tan は正接関数、 \ln は自然対数とする。

高校で習う段階で、三角関数や指数関数などの定義域は実数の範囲に制限されている。さらに、指数関数では底の範囲が正の整数に制限されている。私たちは、これらを複素数の範囲まで広げた時にどのようなものか興味を持ち、調査を進めた。調査の過程で見つけた「複素関数」と呼ばれる分野を学んでいくと、そのような関数は存在こそするが（今回の研究対象と性質が違う）、変数が 4 つ出現してしまう都合上、グラフの形で表すことが出来ないことが分かった。そのため私たちは実部虚部を分けてそれぞれ定数や軸に当てはめることによって、グラフを再現しようと

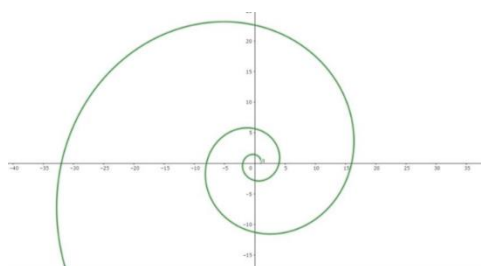
考えた。

それに加え、これらによって得られる式は複素数平面上の図形をどのように変換するのにも興味を持ち、調べることにした。

予備実験として、底を -2 として計算できる値を $x-y$ 平面にプロットしてみたところ、 x が整数でないときに y が虚数になるため二次元で表すことは不可能であった。そこで、 y について複素平面を用いて表す。その様は渦状になるだろうと仮説を立て、検証したところ、実際にそうなりそうだった。その後、岩手大学工学部川崎准教授のご助言により、オイラーの公式を用いて y の値を連続的に表すことができた。一方、 -2 と並行して底が $2i$ の場合も確かめた。巻き方が -2 のときより広がった。 $-2i$ について確かめようとしたとき、 $2i$ と同じように処理したら、前述の二例とは逆の巻き方（時計回り）のように思えたが、細かく x の値を取ったら反時計回りだった。最初は偏角を $-\frac{\pi}{2}$ ととり、後になっ

て偏角を $\frac{3\pi}{2}$ でとったことによるものである。

複素数の実数乗を複素平面でとった図は以下のようになる。



以上を参考に複素数の複素数乗のグラフ化について考える。

2 研究方法

(1) 研究対象

指数関数の底および独立変数を複素数に置き換えて計算した。一般化するために具体的な数ではなく文字を用いている。三角関数についても独立変数を複素数に拡張して計算した。計算の際、指数関数ではオイラーの公式、指数法則を、三角関数ではオイラーの公式、加法定理、三角比の相互関係を使用している。

式は以下の通り。 $\theta = \arg(a + bi)$ とした。指数関数

$$\begin{aligned} & (a + bi)^{(c+di)} \\ &= (a + bi)^c \times (a + bi)^{di} \\ &= \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^c \times (\cos\theta + i\sin\theta)^c \times e^{di\ln(\sqrt{a^2+b^2})} \\ &\quad \times (\cos\theta + i\sin\theta)^{di} \\ &= \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^c \times e^{i\theta di} \times e^{i\{c\theta + d\ln(\sqrt{a^2+b^2})\}} \\ &= \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^c e^{-d\theta} \left\{ \cos\left(\theta c + d\ln\sqrt{a^2 + b^2}\right) \right. \\ &\quad \left. + i\sin\left(\theta c + d\ln\sqrt{a^2 + b^2}\right) \right\} \end{aligned}$$

これを z, w を用いて表すと、

$$\begin{aligned} z^w &= \exp\{Re(w)\ln|z| - Im(w)\arg(z)\} \\ &\quad [\cos\{Re(w)\arg(z) + Im(w)\ln|z|\} \\ &\quad + i\sin\{Re(w)\arg(z) + Im(w)\ln|z|\}] \end{aligned}$$

となる。

また、従来の複素関数では $z^w := e^{w\ln(z)}$ と定義される。これを变形すると

$$\begin{aligned} & \exp[\{Re(w) + iIm(w)\}\{\ln|z| + i\arg(z)\}] \\ &= \exp[\ln|z|Re(w) - \arg(z)Im(w) \\ &\quad + i\{\ln(z)Im(w) + \arg(z)Re(w)\}] \end{aligned}$$

となって上の式と等しくなる。この式を GeoGebra に打ち込み、グラフの形状を観察

する。

三角関数

$$e^{ibi} = \cos bi + i\sin bi$$

$$e^{-ibi} = \cos bi - i\sin bi$$

この二式の両辺を加減すると、

$$\cos bi = \frac{e^b + e^{-b}}{2}, \sin bi = \frac{e^b - e^{-b}}{2}i$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} & \sin(a + bi) \\ &= \sin a \cos bi + \sin bi \cos a \\ &= \frac{\sin(a) \times (e^{-b} + e^b)}{2} + i \left\{ \frac{\cos(a) \times (e^b - e^{-b})}{2} \right\} \\ & \cos(a + bi) \\ &= \cos a \cos bi - \sin a \sin bi \\ &= \frac{\cos(a) \times (e^b + e^{-b})}{2} + i \left\{ \frac{\sin(a) \times (e^{-b} - e^b)}{2} \right\} \\ & \tan(a + bi) \\ &= \frac{\sin(a + bi)}{\cos(a + bi)} \\ &= \frac{2\sin 2a}{e^{-2b} + e^{2b} + 2\cos 2a} + i \frac{e^{-2b} - e^{2b}}{e^{-2b} + e^{2b} + 2\cos 2a} \end{aligned}$$

また、従来の複素関数では複素数 z に対して

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

であるが、これを变形しても上の式と等しくなる。もともと、この定義からの变形より加法定理が成り立つことより、本研究で実虚を分けるにあたり手順を少なくするために純虚数の三角関数を求めた後、加法定理を用いた。この式を GeoGebra に打ち込み、グラフの形状を観察する。

(2) 観察・実験・調査の手順

・観察・実験・調査 1

独立変数、従属変数に当たる複素数の実部と虚部を軸か定数にそれぞれ対応させグラフ上に表す。

平面のグラフと立体のグラフを作成する。平面のグラフでは従属変数の実部虚部をそれぞれ x 軸、 y 軸に対応させる。独立変数は定数によって表す。その際実部か虚部のどちらかを媒介変数で表すことで影響を実線で表す。立体のグラフは平面のグラフに独立変数の実部を新たに導入し、独立変数虚軸を x 軸、従属変数実軸を y 軸、従属変数虚軸を z 軸で表す。また、指数関数については絶対値、偏角ごとにグラフを作成する。

指数関数の底は $(1 + i)$ 、その偏角は $\frac{\pi}{4}$ にし

て計算した。このとき、

$$(1+i)^{a+bi} = e^{\frac{1}{2}a \ln 2 - \frac{\pi}{4}b} \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{4}a + \frac{1}{2}b \ln 2\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}a + \frac{1}{2}b \ln 2\right) \right\}$$

となる。

これを用いて GeoGebra に可変の定数 a, b, c, d

を設定し、 $l := \sqrt{a^2 + b^2}, w := \tan^{-1} \frac{b}{a}$ と定義し、

$(l^t e^{-dw} \cos(wt + d \ln(l)), l^t e^{-dw} \sin(wt + d \ln(l)))$,
 $(l^c e^{-tw} \cos(wc + t \ln(l)), l^c e^{-tw} \sin(wc + t \ln(l)))$
 と打ち込む。

ほかの関数についてもそれぞれ以下のように GeoGebra に打ち込む。

sin	$\left(\frac{\sin(t)(e^{-b}+e^b)}{2}, -\frac{\cos(t)(e^{-b}-e^b)}{2}\right)$
	$\left(\frac{\sin(a)(e^{-t}+e^t)}{2}, -\frac{\cos(a)(e^{-t}-e^t)}{2}\right)$
cos	$\left(\frac{\cos(t)(e^{-b}+e^b)}{2}, \frac{\sin(t)(e^{-b}-e^b)}{2}\right)$
	$\left(\frac{\cos(a)(e^{-t}+e^t)}{2}, \frac{\sin(a)(e^{-t}-e^t)}{2}\right)$
tan	$\left(\frac{2 \sin(2t)}{e^{-2b} + e^{2b} + 2 \cos(2t)}, \frac{e^{-2b} - e^{2b}}{e^{-2b} + e^{2b} + 2 \cos(2t)}\right)$
	$\left(\frac{2 \sin(2a)}{e^{-2t} + e^{2t} + 2 \cos(2a)}, \frac{e^{-2t} - e^{2t}}{e^{-2t} + e^{2t} + 2 \cos(2a)}\right)$
	$\left(\frac{2 \sin(2t)}{e^{-2t} + e^{2t} + 2 \cos(2a)}, \frac{e^{-2t} - e^{2t}}{e^{-2t} + e^{2t} + 2 \cos(2a)}\right)$

立体のグラフも以下の通り打ち込む。

指数関数	$(t, l^c e^{-tw} \cos(wc + t \ln(l)), l^c e^{-tw} \sin(wc + t \ln(l)))$
sin	$(t, \frac{\sin a (e^{-t} + e^t)}{2}, -\frac{\cos a (e^{-t} - e^t)}{2})$
cos	$(t, \frac{\cos a (e^{-t} + e^t)}{2}, \frac{\sin a (e^{-t} - e^t)}{2})$
tan	$(t, \frac{2 \sin 2a}{e^{-2t} + e^{2t} + 2 \cos 2a}, \frac{e^{-2t} - e^{2t}}{e^{-2t} + e^{2t} + 2 \cos 2a})$

指数関数の絶対値、偏角のグラフは以下のとおりである。

絶対値	$z = e^{\frac{1}{2}x \ln 2 - \frac{\pi}{4}y}$
偏角	$z = \frac{\pi}{4}x + \frac{1}{2}y \ln 2$

・観察・実験・調査 2

指数関数において複素数平面上の図形がどのように変換されるのか実数と比較して複素数平面を模したグラフに表す。GeoGebra に以下のように打ち込む。

指数関数	$(2^a e^{-btan^{-1}(\frac{\sqrt{4-t^2}}{t})} \cos(atan^{-1}(\frac{\sqrt{4-t^2}}{t}) + t \ln(2)), 2^a e^{-btan^{-1}(\frac{\sqrt{4-t^2}}{t})} \sin(atan^{-1}(\frac{\sqrt{4-t^2}}{t}) + t \ln(2)))$
	$(2^a e^{-btan^{-1}(\frac{-\sqrt{4-t^2}}{t})} \cos(atan^{-1}(\frac{-\sqrt{4-t^2}}{t}) + t \ln(2)), 2^a e^{-btan^{-1}(\frac{-\sqrt{4-t^2}}{t})} \sin(atan^{-1}(\frac{-\sqrt{4-t^2}}{t}) + t \ln(2)))$

sin	$\left(\frac{\sin t (e^{-\sqrt{1-t^2}} + e^{\sqrt{1-t^2}})}{2}, -\frac{\cos t (e^{-\sqrt{1-t^2}} - e^{\sqrt{1-t^2}})}{2}\right)$
	$\left(\frac{\sin t (e^{\sqrt{1-t^2}} + e^{-\sqrt{1-t^2}})}{2}, -\frac{\cos t (e^{\sqrt{1-t^2}} - e^{-\sqrt{1-t^2}})}{2}\right)$
cos	$\left(\frac{\cos t (e^{-\sqrt{1-t^2}} + e^{\sqrt{1-t^2}})}{2}, \frac{\sin t (e^{-\sqrt{1-t^2}} - e^{\sqrt{1-t^2}})}{2}\right)$
	$\left(\frac{\cos t (e^{\sqrt{1-t^2}} + e^{-\sqrt{1-t^2}})}{2}, \frac{\sin t (e^{\sqrt{1-t^2}} - e^{-\sqrt{1-t^2}})}{2}\right)$
tan	$\left(\frac{2 \sin(2t)}{e^{-2\sqrt{1-t^2}} + e^{2\sqrt{1-t^2}} + 2 \cos(2t)}, \frac{e^{-2\sqrt{1-t^2}} - e^{2\sqrt{1-t^2}}}{e^{-2\sqrt{1-t^2}} + e^{2\sqrt{1-t^2}} + 2 \cos(2t)}\right)$
	$\left(\frac{2 \sin(2t)}{e^{2\sqrt{1-t^2}} + e^{-2\sqrt{1-t^2}} + 2 \cos(2t)}, \frac{e^{2\sqrt{1-t^2}} - e^{-2\sqrt{1-t^2}}}{e^{2\sqrt{1-t^2}} + e^{-2\sqrt{1-t^2}} + 2 \cos(2t)}\right)$

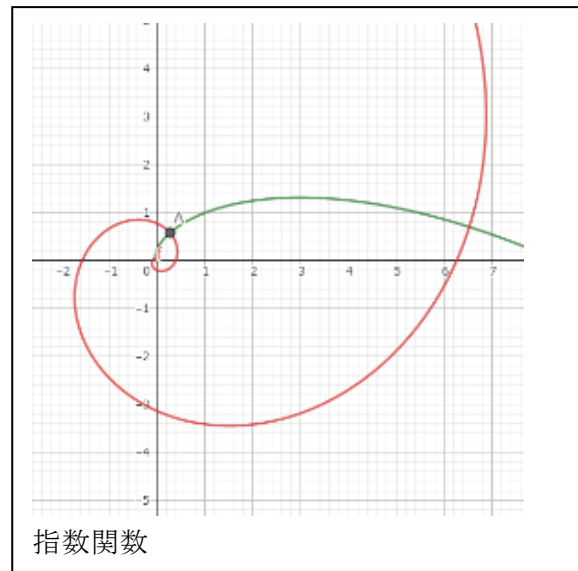
(3) データ処理の方法

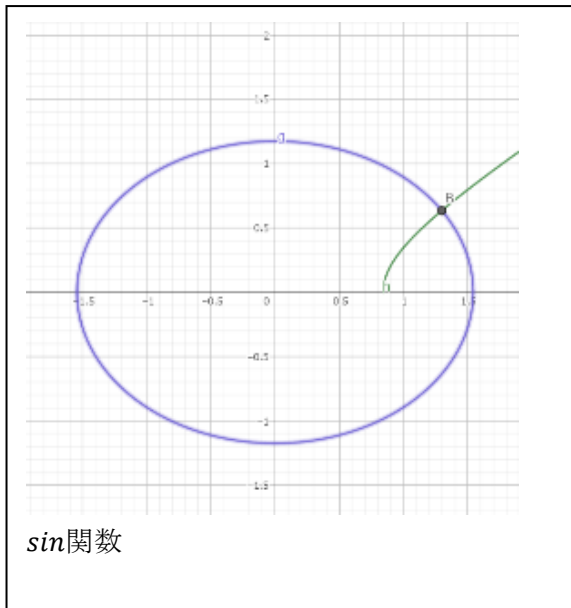
グラフの作成は全て「GeoGebra」を用いて行った。

3 結果

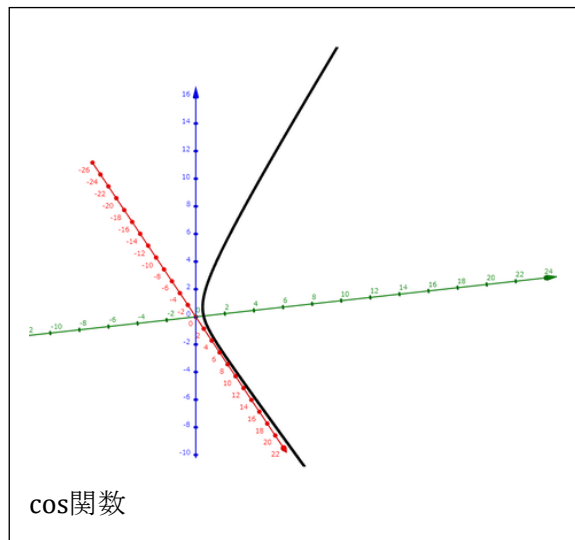
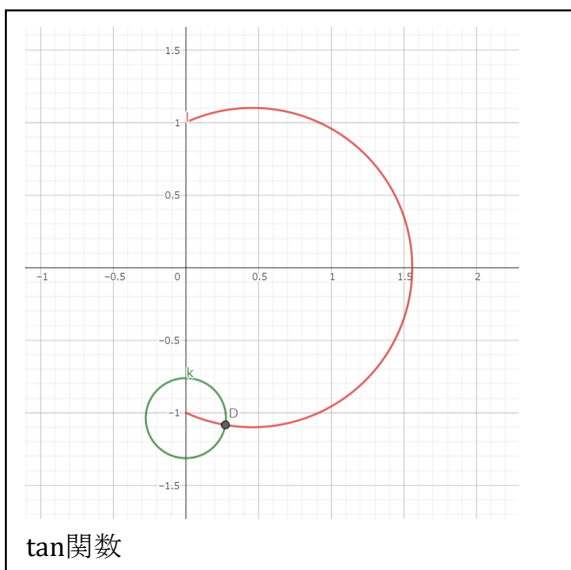
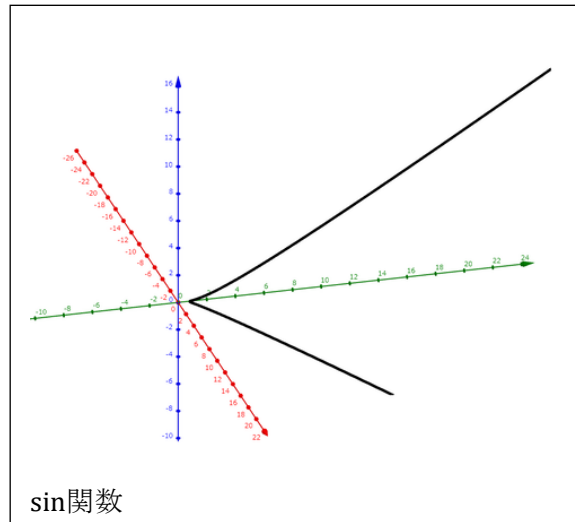
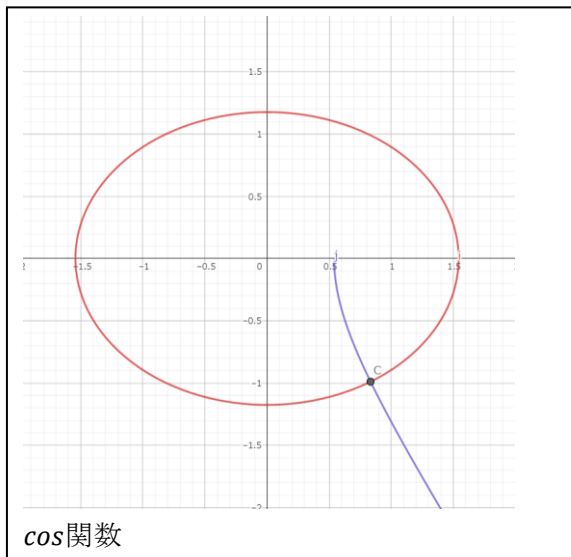
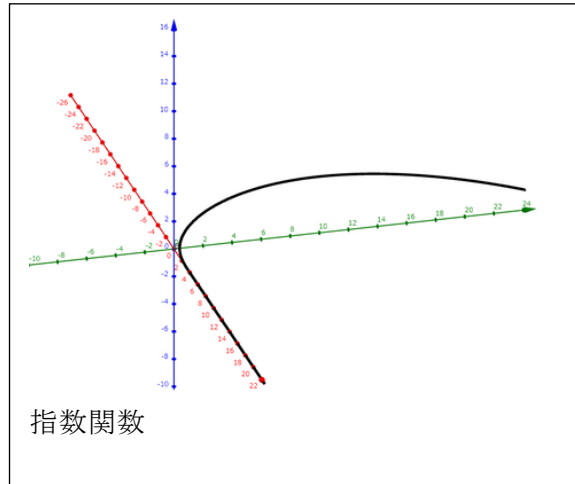
実験 1 について、指数関数・三角関数のグラフは以下ようになった。

平面のグラフは左から右へ延びる軸が従属変数の実軸、下から上へ延びる軸は従属変数の虚部を表す。

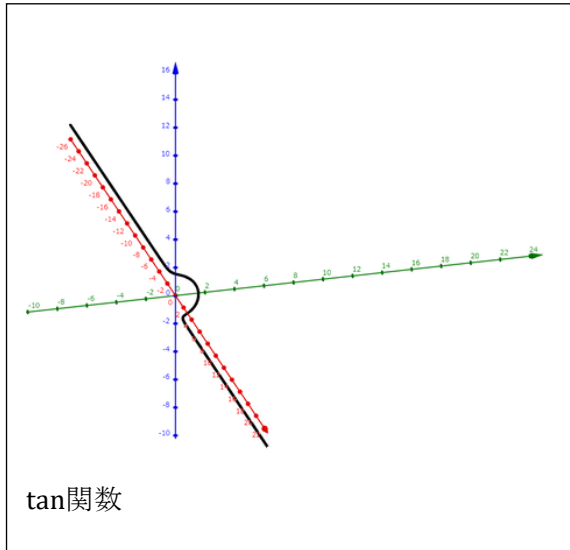




変数虚軸を、右下から左上へ延びる軸は属変数実軸を表し、下から上へ延びる軸は従属変数虚軸を表す。

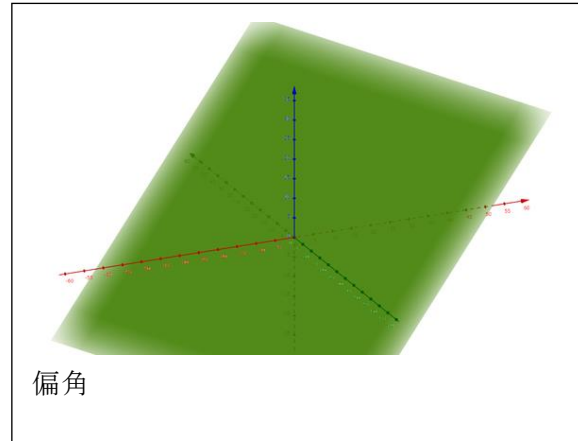
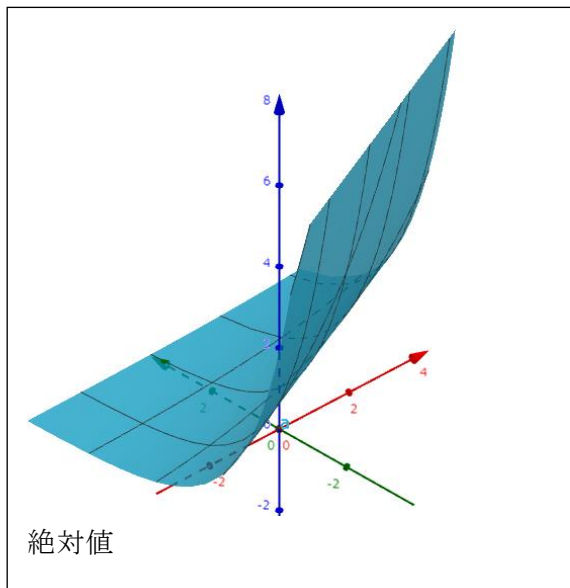


立体のグラフは、左から右へ延びる軸は独立

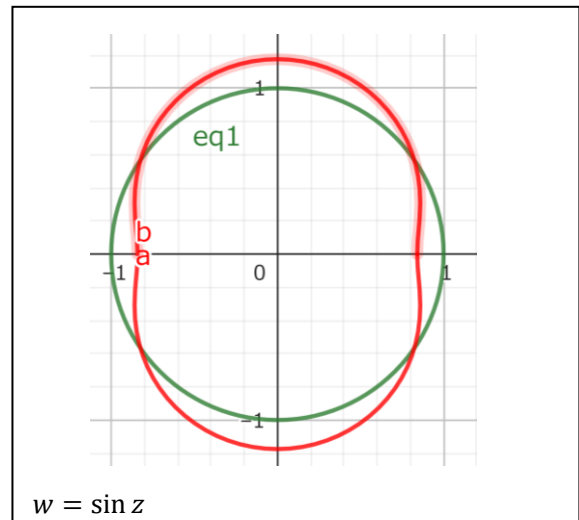
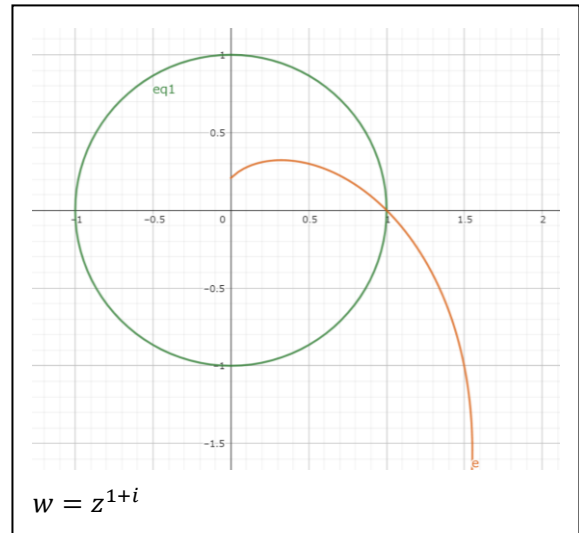


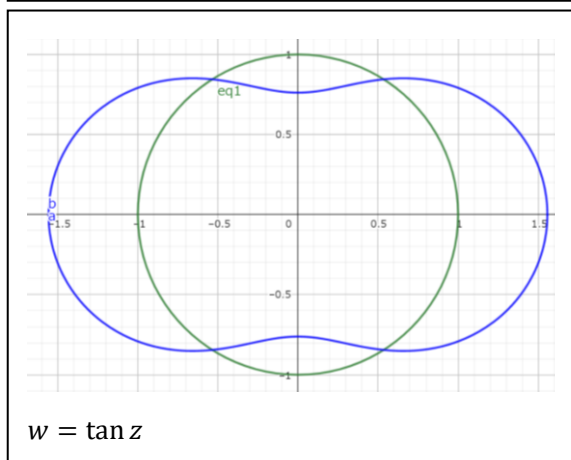
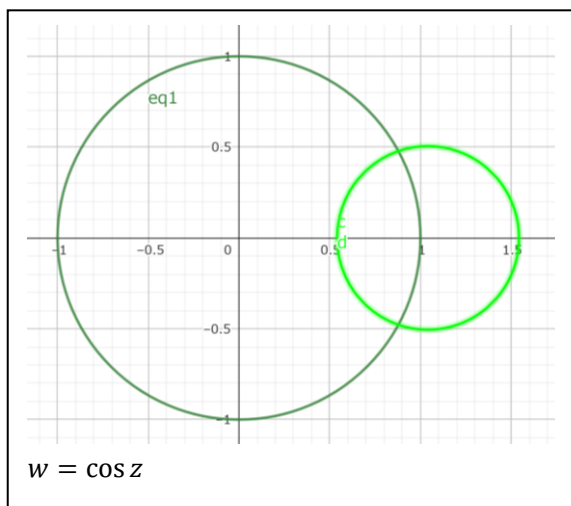
また、指数関数において絶対値、偏角別のグラフは以下のものであった。

左から右へ延びる軸は指数の実部を表し、右下から左上へ延びる軸は指数の虚部を表す。下から上へ延びる軸は求める絶対値、偏角をそれぞれ表す。



実験 2 について、中心が原点、半径が 1 の円が変換する前の $|z| = 1$ (指数関数の場合は $|z| = 2$) で表される図形である。変換に用いた式はそれぞれ $w = \sin z$, $w = \cos z$, $w = \tan z$, $w = z^{1+i}$ であり、 w の軌跡を表している。





4 考察

実験 1 において、指数関数はどちらを媒介変数にした場合でもお互い逆回りに渦を巻くようなグラフになり、数一つに定めたにも関わらず複数の点で交わっていることが分かった。

三角関数のグラフは、すべてのグラフにおいて実数の場合と同様に周期性があることが分かった。しかし、虚部がどのような値でも実部の動きによる周期性は存在するが、虚部については発散・収束し、グラフが一続きになることがないことが分かった。そのほかにも \sin と \cos の類似などが読み取れた。

複素数乗による変換は底と指数に影響されることが分かった。絶対値、偏角の増え方は実験 1 から読み取れる。偏角は比例的に増加するが、特に、偏角を表す平面は原点を通り、

ベクトル $n = \begin{pmatrix} \pi \\ 2 \ln 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ に垂直な平面で

ある。絶対値について具体的なことはわから

ないが、指数関数のグラフのように見える。

実験 2 において、 \sin と \cos はグラフでは形状が一致していたにも関わらず、円の変換では \sin は円がゆがんだ形、 \cos は中心と半径が変わった円と異なる形になった。 \sin と \tan は向きを除いて形が似ているが、 \sin と比べて \tan は全体的に滑らかにつながっているように見える。指数関数については、論文によって示した図では表されていないが GeoGebra に打ち込んだ式だと半円になってしまい、かつ虚部を変化させたときに連続していない交差する 2 本の曲線になってしまった。

5 結論・今後の展望

複素数まで定義域を拡張したグラフの作成は完了した。これにより、実数との違いを図形的に確認できた。

変換を行ったとき、 \sin と \tan は元の形状から大きく変化したが、 \cos と指数は比較的元の円の状態を保っている。指数の変換はそれが正確なのか確実ではないため、正当性を確かめたい。

謝辞

本研究を行うにあたり、ご指導いただいた吉川彰彦先生、阿部敬太先生、稲田翔吾先生に深謝申し上げます。また、ご助言いただいた岩手大学教育学部吉井洋二教授、同理工学部川崎秀二准教授に深く御礼申し上げます。

参考文献

・川平 友規、複素関数の基礎のキソ

[https://www1.econ.hit-](https://www1.econ.hit-u.ac.jp/kawahira/courses/kansuron.pdf)

[u.ac.jp/kawahira/courses/kansuron.pdf](https://www1.econ.hit-u.ac.jp/kawahira/courses/kansuron.pdf)