連分数を用いたｎ次方程式の解き方

～方程式の解の新しい表示方法～

岩手県立一関第一高等学校数学科２年数学１班
久保田俊宗　小野寺健心　皆川天斗　西島悠

要約

私たちは、方程式を変形し、得られた連分数による漸化式の収束を調べた。そして、その値が元の方程式の解と一致するかについて研究した。その結果、2 から 5 次までの方程式について、規則性に基づいてそれぞれの方程式の解が表現されるということが分かった。

<キーワード>　　連分数　漸化式　近似解

ABSTRACT

We examined the convergence of the recurrence relations based on the continued fraction given by the transformation of equations.When any convergence values are obtained, we studied about whether the values correspond the solutions of the original equations.As a result, regarding the equations of degree 2 to 5, we discovered that approximate solutions or original solutions of equations can be showed in all cases under each regularity.

１　はじめに

古くから方程式の解き方に関して、さまざまな研究がなされてきた。その中で、私たちは方程式と連分数の関連性に興味を持った。連分数とは、一般的に、分母にさらに分数が含まれる分数のことで、無理数を有理数のみで表示するのに用いられる。

たとえば$\sqrt{2}$について、その小数部分$\sqrt{2}$-1 を求める。小数部分の逆数$\frac{1}{\sqrt{2}-1}$の整数部分と小数部分を求めて、次のような関係式を得る。

$$\sqrt{2}=1+\left(\sqrt{2}-1\right)=1+\cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{2}-1}}$$

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}$$

のような表現を得る。

連分数は、このような整数だけでは表されない半端な数を表すために用いられ研究されてきている。

先輩方による先行研究では、実数解をもたない 2 次方程式の解を、連分数を用いて表し、無限に続く連分数をどこで打ち切るかによってその値がどのように推移するかという規則性が調査されている。また、インターネット上のある書店のブログの記事([1]つみき書店)では、$\sqrt{2}$の連分数を、$\sqrt{2}$を解にもつ方程式$x^2=2$を変形することにより導いていた。これらの文献から、私たちは実数解をもつ 2 次方程式、そしてそれよりも高次の方程式の解を、連分数表示を利用して、整数だけで表現できるのではないかと考えた。

２　研究方法

(1) 観察・実験・調査の手順

・観察・実験・調査 1

まず変数aを実数の範囲で設定して考える。例として 2 次方程式$x^2-6x+8=0$を, 変数aを用いて$(x-a)(x+a-6)+a^2-6a+8=0$変形する。例えば, $a=0$で$x(x-6)+8=0$となる。その後$x=6-\frac{8}{x}\cdots$①$\Leftrightarrow x=6-\frac{8}{6-\frac{8}{\cdots}}$となる。この式では$x$の値を求められないので$x$が出てきた時点で打ち切る。$t$回目で打ち切るということは①の式に$t-1$回目の値を入れることと同値だ。そのため①の連分数を漸化式x_tにした。また $t=100$の時点でx_tの値の収束が十分見込めるため$t=100$までの値を求めその値に注目し

た。そしてaの値を変えて同様の操作を行いx_tの収束値を調べた。

・観察・実験・調査 2

次に変数aを虚部を持つ複素数まで展開して考える。観察・実験・調査 1 と同様の手順で計算する。

(2) データ処理の方法

私たちはデータ処理を Excel で行った。あるセル(A1)に変数aを入力する。その右隣のセル(B2)に、調べる方程式連分数の漸化式に変数を代入したものを入力する。例えば、(2)の方程式の時、漸化式$x = 6 - \frac{8}{x}$を=6－(8/A1)と打ち込み変数が$x = 6 - \frac{8}{x}$の分母のxに入るようにする。次に A2 に B1 の値を代入する。B2=6－(8/A2)となり、またその値を A3 に代入する。このような操作を繰り返すことで A 列t行目がx_tの値になる。そして、この操作の繰り返しによってx_tの解または収束値が現れる。

３　結果

まず初めに解がすべて実数解である方程式について調べた。2，4 を解に持つ 2 次方程式x^2−6 x＋8=0 を式変形しそれを漸化式に直すと$\boldsymbol{x_{t+1} = a - \frac{a^2-6a+8}{x_t+a-6}}$となる。$a$<2 で x_tは 2 に, a>4 で 4 に収束し，$2<a<4$ では収束しなかった。a＝1 の時は一般項x_tは$2 + \frac{-2}{3^t-1}$より$t \to \infty$で 2 に収束する。一方、a＝2.5 の時はx_t＝$\frac{3^t(6-\sqrt{2}i)-(6+\sqrt{2}i)(-1-2\sqrt{2}i)^t}{2\cdot 3^t-2(-1-2\sqrt{2}i)^t}$となり収束は見込めなかった。下の図は$x_t$を y＝$f(t)$としてグラフに直したものである。

ここで、a<2 , a>4 でそれぞれ 2 と 4 に収束することを証明する。$x_{t+1} = a - \frac{a^2-6a+8}{x_t+a-6}$ここで$y_t = \frac{x_t-\alpha}{x_t-\beta}$とおくと$y_{t+1} = \frac{a-\alpha}{a-\beta} \cdot \frac{x_t+\frac{-a\cdot\alpha+6\alpha-8}{a-\alpha}}{x_t+\frac{-a\cdot\beta+6\beta-8}{a-\beta}}$である。数列$\{y_t\}$が等比数列になるための条件は$\frac{-a\cdot\alpha+6\alpha-8}{a-\alpha} = -\alpha$、$\frac{-a\cdot\beta+6\beta-8}{a-\beta} = -\beta$よって、$\alpha, \beta$は方程式$-a\cdot x + 6x - 8 = -x(a-x) \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$の 2 つの解であり　x＝2，4　すなわちα＝2、β＝4　数列$\{y_t\}$は初項$\frac{a_1-2}{a_1-4} = \frac{a-2}{a-4}$、公比$\frac{a-\alpha}{a-\beta} = \frac{a-2}{a-4}$の等比数列であるから$\frac{x_t-2}{x_t-4} = \left(\frac{a-2}{a-4}\right)^t \Leftrightarrow$ $x_t - 2 = \left(\frac{a-2}{a-4}\right)^t x_t - 4\left(\frac{a-2}{n-4}\right)^t$より$x_t = \frac{2\left(\frac{a-4}{a-2}\right)^t-4}{\left(\frac{a-4}{a-2}\right)^t-1} = 2 + \frac{-2}{\left(\frac{a-4}{a-2}\right)^t-1}$　$a < 2$より$\frac{a-4}{a-2} > 1$ だから$\lim_{t\to\infty} x_t = 2$となる※$a > 4$ *の時*も同様に導き$x_t = \frac{2\left(\frac{a-4}{a-2}\right)^t-4}{\left(\frac{a-4}{a-2}\right)^t-1} = 4 + \frac{2}{\left(\frac{a-2}{a-4}\right)^t-1}$だから$\lim_{t\to\infty} x_t = 4$となる。よってそれぞれの収束の仕方を証明できた。また,二つの解を 2，4 ではなくそれぞれs, tとすると同じ証明方法を用いて全ての 2 次方程式で成り立つことが証明できる。

2，4，6 を解に持つ 3 次方程式$x^3 - 12x^2 + 44x - 48 = 0$ も漸化式$x_{t+1} = a + \frac{a^3-12a^2+44a-48}{x_t{}^2+(a-12)x_t+(a^2-12a+44)}$に直し$x_t$の収束値を調べたところ，$a$<3 では、$x_t$は 2 に収束した。3<$a$<5, a≠4 では、x_tは 4 に収束した。5<aではx_tは 6 に収束した。aが 3，4，5 の場合はx_tはそれぞれ 6，4，2 になった。

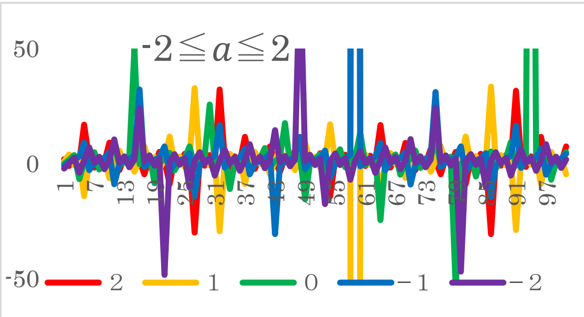
2，4，6，8 を解に持つ 4 次方程式$x^4 - 20x^3 + 140x^2 - 400x + 384 = 0$ も漸化式$\boldsymbol{x_{t+1} = a - \frac{a^4-20a^3+140a^2-400a+384=0}{x_t{}^3+(a-20)x_t{}^2+(a^2-20a+140)x_t+a^3-20a^2+140a-400}}$に直し$x_t$の収束値を調べたところ，$a$＜3, a≠2 では, x_tは 2 に収束した 。 3≦a＜5, a≠4 では, x_tは 4 に収束した。 a＝5 は, 分母が 0 になり不適。5＜a≦7, a≠6 では，x_tは 6 に収束した。 7 ＜ a, a ≠8 では， x_t

は 8 に収束した。$a=2,4,6,8$ではx_tがそれぞれ 2，4，6，8 になった。

2，4，6，8，10 を解に持つ 5 次方程式$x^5-30x^4+340x^3-1800x^2+4384x-3840=0$も漸化式$\boldsymbol{x_{t+1}=a-\frac{a^5-30a^4+340a^3-1800a^2+4384a-3840}{x_t{}^4+(a-30)x_t{}^3+(a^2-30a+340a)x_t{}^2+(a^3-30a^2+340a-1800)x_t+a^4-30a^3+340a^2}}$に直し$x_t$の収束値を調べたところ，$a$<2, 6<$a$<8 では，$x_t$は 2 に収束した。2<$a$<4 では，$x_t$は 4 に収束した。 8< a <10 では，x_tは 8 に収束した。 4< a <6， 10< a では，x_tは 10 に収束した。aが，この方程式の解である 2，4，6，8，10 の時、漸化式にそれぞれ代入したところx は 2，4，6，8，10 になった。

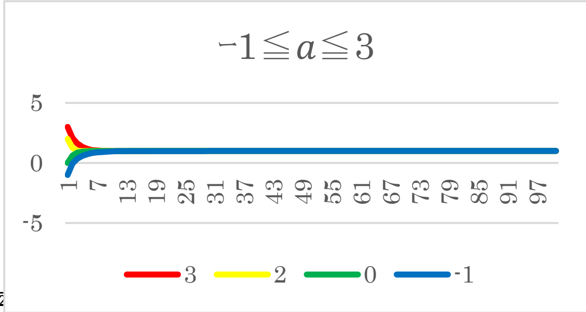
また，2 つの虚数解をもつ 2 次方程式$x^2-3x+5=0$ でx_tの収束値を調べようとしたところ，漸化式$\boldsymbol{x_{t+1}=a-\frac{a^2-3a+5}{x_t+a-3}}$は解に収束

しなかった。下の図はaを−2 から 1 ずつ 2 まで動かしたときのx_tの変化をグラフに表したものである。

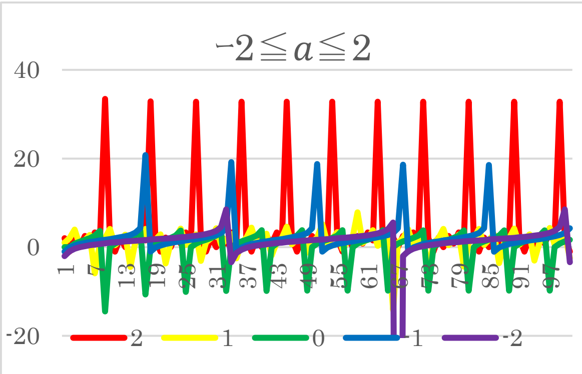


1 つの実数解-1と 2 つの虚数解をもつ 3 次方程式$x^3-4x^2+8x-5=0$では漸化式$\boldsymbol{x_{t+1}=a-\frac{a^3-4a^2+8a-5}{x_t{}^2+(a-4)x_t+a^2-4a+8}}$となり$a$の値によらず$-1$に収束した。

下の図はaを−1 から 1 ずつ 3 まで動かしたときのx_tの変化をグラフに表したものである。

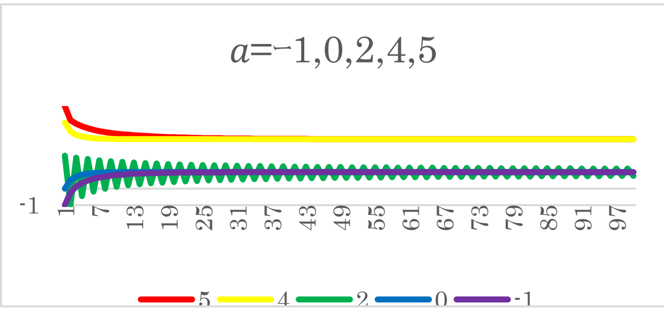


すべてが虚数解である 4 次方程式$x^4-20x^3+140x^2-400x+384=0$では，漸化式$\boldsymbol{x_{t+1}=a+\frac{a^4-20a^3+140a^2-400a+384}{x_t{}^3+(a-20)x_t{}^2+(a^2-20a+140)x_t+a^3-20a^2+140a-400}}$はどの$a$でも解には収束しなかった。下の図は$a$を−2 から 1 ずつ 2 まで動かしたときの$x_t$の変化をグラフに表したものである。



2 つの実数解 1,3 と 2 つの虚数解をもつ 4 次方程式$x^4-7x^3+23x^2-38x+30=0$ではその 2 つの実数解に収束した。漸化式は$\boldsymbol{x_{t+1}=a-\frac{a^4-7a^3+23a^2-38a+30}{x_t{}^3+(a-7)x_t{}^2+(a^2-7a+23)x_t+a^3-7a^2+23a-38}}$

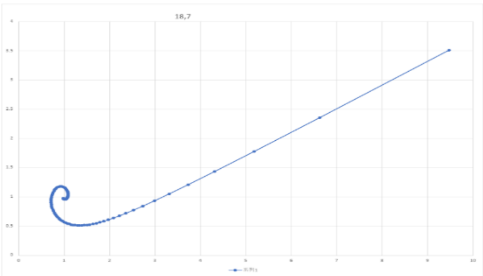
で下の図はaを−1 から 1 ずつ 5 まで動かしたときのx_tの変化をグラフに表したものである。



一方，2 次方程式$x^2-6x+8=0$ でaを複素数に展開したときに実部が(2,3)でx_tは 2 に，(3,4)でx_tは 4 に収束した。

また、虚数解$1\pm i$を解に持つ,2 次方程式 $x^2-2x+2=0$ では実部によらず虚部が$(-\infty,-1)$でx_tは$1-i$に，$(1,\infty)$でx_tは$1+i$になった。

下の図は$\boldsymbol{a}$ を 18＋7 iにしたときのx_tの変化をグラフに表した。tの値が増えるにつれて右上から左下に動きやがて渦を巻きながら$1+i$に収束していることが分かる。



４　考察

今回、実数解を 2，4，6…のように全て偶数に設定し計算したがx_tの収束を決定するaの範囲は特異的ではないと予想する。実数解をα、β、γ、δ、ε…とすると例えば 3 次方程式では$a<\frac{\alpha+\beta}{2}$のときx_tはαに、$\frac{\alpha+\beta}{2}<a<\frac{\alpha+\gamma}{2}$、$\frac{\alpha+\gamma}{2}<a<\frac{\beta+\gamma}{2}$**のとき**βに、$\frac{\beta+\gamma}{2}<a$のときγになると思われる。

また、2 次方程式を連分数にした一次分数の漸化式には一般項導出の解法があったが、二次分数以降には解き方は無くそもそも一般項が存在しないのではないかと考える。

５　結論・今後の展望

実数を解に持つ方程式を連分数展開したとき、全ての場合でその方程式の近似解もしくは解に収束することが分かった。だいたいは近似解であったが、2 次方程式の一部の範囲で収束が見られなかった。それ以外$t=1$の時点でxが解そのものになった。虚数解をもつ 2-4 方程式では, 実数 aの値を変化させても虚数解が現れることはなく実数解があったときにはその解に収束したがそうでなければ収束しなかった。一方, 虚数を含んだ複素数aでは虚数解も近似解として表示できた。今後はどの実数解を持つ 3，4，5 次方程式でも連分数に式変形することによって近似解または解を表示できることを証明する方法を探していきたい。

謝辞

本研究を行うにあたり，ご指導くださった川崎秀二先生、吉井洋二先生、宮本次郎先生、吉川彰彦先生、阿部敬太先生、稲田翔吾先生、ありがとうございました。

参考文献

・つみき書店　2022 年 3 月 21 日の投稿
「$-\sqrt{2}$は何処へ」