収束しない連分数の規則性

The regularity of non-convergent continued fractions

岩手県立一関第一高等学校理数科３年数学班
安部清也 及川悠里 斎藤匠 平沼颯泰

要約

2 次無理数 $a+b\sqrt{q}$ はこれを解とする二次方程式を用いて循環連分数により表せるという定理がある.そこで私たちは $x=2\pm i$ を解にもつ二次方程式 $x^2-4x+5=0$ から上の定理による方法によって作られる連分数 ω を考え，これが虚数 i を表すと期待した.実際にその連分数の循環部分が t 回現れた時点で打ち切った連分数 ω_t を計算すると，その値は $t\to\infty$ のとき収束する様子がなく，複雑に変化した.我々はこの値について研究し，ω_t は単純な一次式の正接関数で表されることを証明した.

1 序論

「10 を 3 で割る」ことを自然数の範囲で考えると，商 3 が立つが割り切れずに 1 余る.

$10=3\times3+1$

あまりの 1 をさらに 3 等分することはできず，自然数の範囲ではこれ以上割り算を進めることができなかった.

この半端な数をきちんと扱うために, 1 を 10 等分した 0.1 を考えることによって

$1=0.1\times10=0.1\times(3\times3+1)=0.9+0.1$

という分割を考えて

$$10=3\times3+3\times0.1+1\times0.1$$

とすれば, 10 を三等分するとき半端な数をより小さくすることができた.さらに半端な数 0.1 が出てきたが，これも 10 等分した数 0.01 を考えることで,

$$0.1=0.01\times10=0.01\times(3\times3+1)$$
$$=0.09+0.01$$

となる.これをどんどん繰り返すことにより $10\div3=3.333\cdots$ と小数表示することを学んで使ってきた.

半端な数を表すために小数を使う以前は，分数を使う文化であった.10 を 3 で割ると $10=3\times3+1$ となるので，商は 3 で半端な数は$\frac{1}{3}$と表してきたのである.

例えば$\sqrt{3}$という数は，$1<\left(\sqrt{3}\right)^2<2^2$ なので，整数部分は 1 であり，整数にならない半端な部分は，あえて書くならば，$\sqrt{3}-1$となる.この半端部分の逆数を考えると，これは 1 より大きな数なので，その整数部分を考えることができる.

$$\sqrt{3}-1=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}-1}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} \qquad (1)$$

したがって,

$$\sqrt{3}=1+\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}-1}}=1+\frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}$$

右辺の最後の分数も同様にして

$$\frac{\sqrt{3}+1}{2}=1+\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2}=\frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}-1}}$$

であり，分母について

$$\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1}=\sqrt{3}+1=2+\sqrt{3}-1$$

以上から，

$$\sqrt{3}=1+\frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}=1+\frac{1}{1+\frac{\sqrt{3}-1}{2}}$$

$$=1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+(\sqrt{3}-1)}}$$

と表される.最後に再び $(\sqrt{3}-1)$ が現れたので(1)からの計算が繰り返されていることがわかる.

このことから，

$$\sqrt{3}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

このように分数の分母にさらに分数が入ることが無限に続くような分数(連分数)を考えることとなった.

$$\sqrt{3}-1=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\sqrt{3}-1}}}$$

より

$$\omega_1=1$$

$$\omega_{n+1}-1=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+(\omega_n-1)}}$$

によって定義される数列 $\{\omega_n\}$ を考える.もしもこの数列 $\{\omega_n\}$ が収束すると仮定すれば，その極限値を x とすると, (2)式の両辺の極限値をとると

$$\lim_{n\to\infty}\omega_{n+1}-1=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+(\lim_{n\to\infty}\omega_n-1)}}$$

$$x-1=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+(x-1)}}$$

分母を払うと，$\{\omega_n\}$ についての方程式 $x^2=3$ が得られ，この数列の極限値は $\sqrt{3}$ になることがわかる.

このように，循環する無限連分数 ω から得られる数列 $\{\omega_n\}$ が収束する場合には，その極限値 x は二次方程式の解になる.さらに，任意の 2 次無理数 $a+b\sqrt{q}$ は無限循環連分数で表されることがわかっている.(Lagrange の定理)[1]

連分数についての先行研究は，収束する連分数についてのもので，収束しない連分数についての先行研究はない.

一般化して，形式:

$$a_0+\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\cfrac{a_3}{b_3+\ddots}}}$$

を考える.

Definition 1.　この形式を連分数という.また，$a_0,a_1,a_2,\ldots$や$b_1,b_2,b_3,\ldots$　を，この連分数の要素という.特に(*1)のように要素が無限個あるものを無限連分数といい，要素が有限個のものを有限連分数という.

ここで，任意の整数a_0と整数$a_k,b_k(k=1,2,\ldots,n)$をもちいて

$$a_0+\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\cfrac{a_3}{b_3+\cfrac{\ddots}{\ddots+\cfrac{a_{n-1}}{b_{n-1}+\cfrac{a_n}{b_n+\cfrac{a_1}{b_1+\ddots}}}}}}}$$

と表される無限連分数を，循環連分数と呼ぶことにする．歴史的には，$a_k, b_k(k=1,2,\dots,n)$
を自然数として循環連分数を定義することが多いが，我々の研究で対象としている連分数は二次方程式の変形によって得られるものであり，要素に負の値が含まれることもあるため，上記のように定義する．

Theorem 1.(Lagrange)

a_0 を除くすべての要素が自然数である任意の循環連分数は二次無理数 $a+b\sqrt{q}$ を表し，逆に任意の二次無理数は a_0 を除くすべての要素が自然数である循環連分数で表せる．

一般に，任意の実数解を表す循環連分数を得るために次の操作を行う．

＜操作＞

$p+\sqrt{q}$ を解にもつ二次方程式

$x^2-2px+p^2-q=0$

から，左辺にx，右辺に分母が x の一次式，分子が自然数となる分数式が現れるように変形する．

$$x(x-2p)=-p^2+q$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{p^2-q}{2p-x}$$

その後，右辺のx に $x=\frac{p^2-q}{2p-x}$ を代入することを無限に繰り返すことで，$x=p+\sqrt{q}$ を表す循環連分数が得られる．

$$x=\frac{p^2-q}{2p-x}=\frac{p^2-q}{2p-\cfrac{p^2-q}{2p-x}}$$

$$=\frac{p^2-q}{2p-\cfrac{p^2-q}{2p-\cfrac{p^2-q}{2p-\ddots}}}$$

したがって，

$$x=p+\sqrt{q}=\frac{p^2-q}{2p-\cfrac{p^2-q}{2p-\cfrac{p^2-q}{2p-\ddots}}}$$

とあらわされる．

右辺のx に $x=\frac{p^2-q}{2p-x}$ を代入することをt回繰り返したところで連分数を作る操作をやめたとき，分母にあたる数 $2p$ が t 回現れたところで打ち切られた有限の連分数が得られる．

Definition 2. 一般に，無限循環連分数において，分母にあたる数が t 回現れたところで打ち切った連分数を，t 回打ち切りの連分数という．

ラグランジェの定理は，「任意の二次無理数x を表す連分数を t 回で打ち切ったときの値を x_t とすると，$\lim_{t\to\infty} x_t=x$ が成り立つ」と言い換えることができる．

この<操作>に形式的にしたがって，実数解をもたない二次方程式を変形し，無限連分数を作る．

$x=a+bi$ を解にもつ二次方程式 $x^2-2ax+a^2+b^2=0$
から同様の操作を行うと，

$$x = \cfrac{a^2+b^2}{2a - \cfrac{a^2+b^2}{2a - \cfrac{a^2+b^2}{2a - \cfrac{a^2+b^2}{2a - \ddots}}}} \quad (*1)$$

が得られる．$x = a + bi$ から形式的な操作を行っているので，

$$a + bi = \cfrac{a^2+b^2}{2a - \cfrac{a^2+b^2}{2a - \cfrac{a^2+b^2}{2a - \cfrac{a^2+b^2}{2a - \ddots}}}}$$

$$bi = -\mathrm{a} + \cfrac{a^2+b^2}{2a - \cfrac{a^2+b^2}{2a - \cfrac{a^2+b^2}{2a - \cfrac{a^2+b^2}{2a - \ddots}}}}$$

$$i = \frac{1}{b} \times \left(-a + \cfrac{a^2+b^2}{2a - \cfrac{a^2+b^2}{2a - \cfrac{a^2+b^2}{2a - \cfrac{a^2+b^2}{2a - \ddots}}}} \right)$$

$$i = -\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} + \cfrac{a^2+b^2}{2ab - \cfrac{a^2+b^2}{\cfrac{2a}{b} - \cfrac{a^2+b^2}{2ab - \cfrac{a^2+b^2}{\cfrac{2a}{b} - \ddots}}}} \cdots (*2)$$

と数式の上では変形できる.この連分数が虚数i を表している可能性がある.しかし，詳細な値がわからないので，この連分数を ω とする.連分数 ω の要素はすべて実数であるから，連分数 ω の規則を明らかにすることで，虚数 i を実数のみを用いて表すことができるのではないかと考えた.

本研究は，複素数 $a + bi$ を表すことが期待される連分数の規則を明らかにすることを目的とする.

1.　研究の方法

一例として，$a = 2, b = 1$ の場合，つまり $2 + i$を解にもつ二次方程式から得られた連分数 ω を用い，打ち切り回数 t とそのときの発散連分数の値 ω_t に着目して調べた.

$$\omega' = -2 + \cfrac{5}{4 - \cfrac{5}{4 - \cfrac{5}{4 - \cfrac{5}{4 - \ddots}}}} \cdots (*3)$$

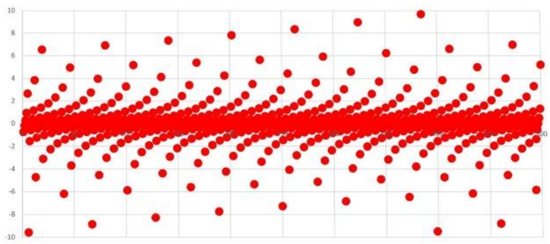
について，Definition 2 にしたがい，分母にあたる数 4 が t 回現れたところで打ち切った有限連分数を ω'_t とする.この値の推移を観察し，ω'_tの値は何を表すのかについて仮説を立て，検証する.

2　観察

横軸を打ち切り回数 t，縦軸を t 回打ち切りの連分数 ω'_t の値とし，点 (t, ω'_t) をとったグラフは下のグラフ 1 のようになる.

<グラフ 1>

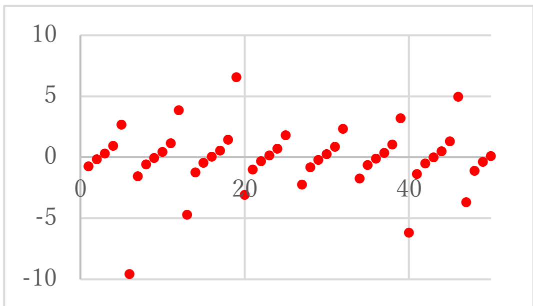
グラフ範囲: $1 \le t \le 1000$, $-20 \le \omega'_t \le 20$



このグラフを拡大したものが次のグラフである.

<グラフ 2>

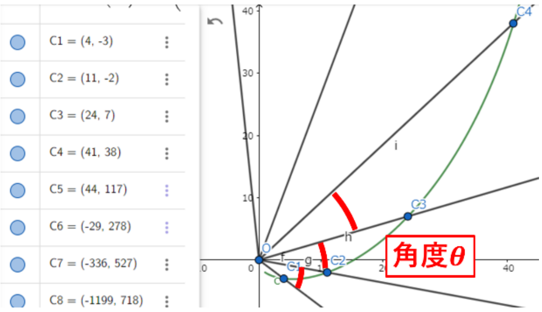
グラフ範囲: $1 \le t \le 50$, $-10 \le \omega'_t \le 10$



グラフ 2 を観察した結果 6 または 7 つ連続して増加し急激に減少,また 6 または 7 つ連続して増加することを繰り返していた.

さらに詳しく値の変化を調べるために, ω_t' の分母と分子をそれぞれP_t, Q_t とし, 点$C_t(P_t, Q_t)$ をグラフ 3 のように座標平面にとった.

<グラフ 3>



各点はらせん状に並び, 原点と点C_t をそれぞれ結んだ直線の傾きを観察すると, その階差が一定になっているように見えた. 傾きの値は $\frac{P_t}{Q_t}$ で表され, これはつまりω_t' の値と一致する. このことより,

$(*3)$の連分数 ω_t' ないし$(*2)$ の連分数をt回で打ち切ったものが一次式を用いた正接関数で表されるのではないかと考えた.

$$\omega = -\frac{a}{b} + \cfrac{a^2+b^2}{2ab - \cfrac{a^2+b^2}{\cfrac{2a}{b} - \cfrac{a^2+b^2}{2ab - \cfrac{a^2+b^2}{\cfrac{2a}{b} - \ddots}}}} \cdots (*4)$$

を打ち切ったものであるω_tの一般項が, 定数 p, q を用いて

$$\omega_t = \tan(pt - q) \cdots (*5)$$

であらわされるという仮説が立った.

3　結果

定理 $x = a + bi$ を解にもつ二次方程式 $x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0$ を変形して得られる無限循環連分数(*4)の t 回打ち切りの連分数ω_tは, $\tan a = \frac{b}{a}$ を満たす角 p を用いて

$$\omega_t = \tan\left(p(t+1) - \frac{\pi}{2}\right) \cdots (*7)$$

と表される.

証明

$$b\omega = \varphi = -a + \cfrac{a^2+b^2}{2a - \cfrac{a^2+b^2}{2a - \cfrac{a^2+b^2}{2a - \ddots}}} \cdots (*8)$$

について, 打ち切りを定義する. 連分数ω(*4)を n 回で打ち切ったものは, 連分数φ(*8)を n 回で打ち切ったものを 1/b したものだといえそうである.

連分数 φ について, Definition 2 にしたがい, 分母にあたる数 $2a$ が t 回現れたところで打ち切った連分数を φ_t とする.

$$\varphi_{t+1} = -a + \frac{a^2+b^2}{2a - (a + \varphi_t)} = -a + \frac{a^2+b^2}{a - \varphi_t}$$

$$= \frac{b^2 + a\varphi_t}{a - \varphi_t}$$

$$\omega_t = \frac{\varphi_t}{b}, \qquad \varphi_t = b\omega_t$$

であるから,

$$b\omega_{t+1} = \frac{b^2 + ab\omega_t}{a - b\omega_t}$$

$$\omega_{t+1} = \frac{b + a\omega_t}{a - b\omega_t} \cdots (*9)$$

という漸化式が成り立つ.

$$\omega_t = tan\theta_t$$

とする. $\theta_{t+1} - \theta_t = \theta$ とする.

$$\tan(\theta_{t+1}-\theta_t)=\frac{tan\theta_{t+1}-tan\theta_t}{1+tan\theta_{t+1}\cdot tan\theta_t}$$

$$=\frac{\omega_{t+1}-\omega_t}{1+\omega_{t+1}\cdot\omega_t}$$

$$=\frac{\frac{b+a\omega_t}{a-\ b\omega_t}-\omega_t}{1+\frac{b+a\omega_t}{a-\ b\omega_t}\cdot\omega_t}$$

$$=\frac{b+a\omega_t-\omega_t(a-\ b\omega_t)}{a-\ b\omega_t+(b+a\omega_t)\cdot\omega_t}$$

$$=\frac{b(1+{\omega_t}^2)}{a(1+{\omega_t}^2)}$$

$$\tan\theta=\frac{b}{a}$$

となり，θ の値が一定値になる．つまり，$(*4)$ における定数 p が，$\tan p=\frac{b}{a}$ で表される定数である．

ここで，$(*9)$ が $t=0$ に関しても成り立つと仮定する．漸化式$(*9)$に$t=0$ を代入すると

$$\omega_1=-\frac{a}{b}+\frac{a^2+b^2}{2ab}=\frac{b+a\omega_0}{a-\ b\omega_0}$$

これをω_0について解いて，$\omega_0=-\frac{a}{b}$ と求められる．

よって $\omega_0=\tan(-q)=-\frac{a}{b}$, $\tan q=\frac{a}{b}$

$p=\frac{b}{a}$ と比較して，

$$b=a-\frac{\pi}{2}+n\pi\ \ (n\in\mathbb{N})$$

したがって，ω_t の一般項は $\tan a=\frac{b}{a}$ を満たす角 p を用いて $(*7)$ のように表されることが示された．

■

4　考察

4-1.グラフとの整合性

$$a=\arctan\frac{1}{2}\approx 0.4636\approx\frac{\pi}{6.776}$$

である．すなわち，正接関数

$f(t)=\tan\left(p(t+1)-\frac{\pi}{2}\right)$

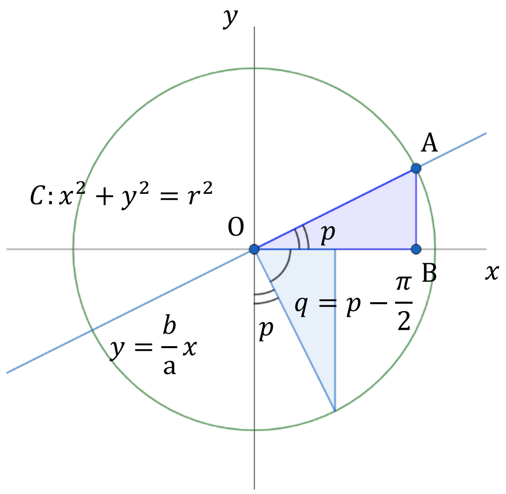
の周期は約6.776 である．周期の値が 6 以上 7 未満であることは，グラフ 2 において，部分的な単調増加が認められる群に含まれる点の数が 6 個または 7 個であることの十分条件である．すなわち，これによって (t,ω_t) が正接関数で正しく表わされていることが裏付けられた．

4-2.虚数解との関係

$\omega_t=\tan\left(p(t+1)-\frac{\pi}{2}\right)$

のにおける定数 p は，次の図 1 のように示される．

＜ 図 1 ＞



原点 O を中心とする半径 r の円 C を考える.また，点 A を円 C 上の点，点 B を点 Aから x 軸におろした垂線の足とする.$\angle\mathrm{AOB}=p$ を満たすとき，$\mathrm{AB}:\mathrm{OB}=a:b$

となり，直線 OA は $y=\frac{b}{a}x$ である.すなわち，p は $\arg(a+bi)$ と一致する．また，$a{:}b$ の比は漸化式$(*9)$の係数比としても現れる．このように，角度 p,連分数ω を得るためにもとにした二次方程式の虚数解 $a+bi$ およびその偏角と，ω_tの漸化式の係数に，共通の関係があることを確認できる．

謝辞

本研究にあたり，ご指導くださった本校教員の千葉賢一先生，宮本次郎先生，岩手大学理工学部の川崎秀二准教授に感謝申し上げます.

参考文献

[1] 坂井 秀隆
循環連分数と二次方程式(2015) 東京大学
[2] William B. Jones， W. J. Thron
Continued Fractions : Analytic Theory and Applications (2009) CAMBRIDGE