単位円に内接する正 n 角形のある性質についての定理の拡張

Some extensions of a theorem about the regular n-gon inscribed in a unit circle

岩手県立一関第一高等学校 3 年
大渡柊太　西山圭太　皆川友唯
OWATARI Shuta and NISHIYAMA Keita and MINAKAWA Yui

概要

単位円に内接する正 n 角形について，ある 1 つの頂点から他の $(n-1)$ 個の頂点に引いた線分の積が n になるという美しい定理がある．私たちはこの定理に興味を持ち，条件を変えてこの定理を拡張することを考えた．結果として，この定理の完全な拡張に成功し，さらにそこから新たな美しい定理を得ることができた．

ABSTRACT

There is an amazing and amusing theorem about the regular n-sided polygon inscribed the unit circle that the product of length of each segment from a vertex to the others is equivalent to n.We were interested in this theorem and tried to extend this theorem by changing conditions.As a result,We found complete extensions and got further beautiful theorems from them.

Keyword : regular n-gon, complex plane, polar form

1　はじめに

単位円に内接する正 n 角形 (以下 $n \geq 2$) について，以下のような定理がある．[1]

Theorem 1. 単位円に内接する正 n 角形のある頂点から他の $(n-1)$ 個の頂点に引いた線分の長さの積 N は n に等しい．

Proof 1. 複素数平面において，単位円に内接する正 n 角形の各頂点は，各頂点を表す複素数を $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ として，

$$\alpha_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$$

と表せる．ただし，k は $0 \leq k \leq n-1$ を満たす自然数である．ここで，方程式 $x^n - 1 = 0$ を考えると

$$(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1) = 0$$

と変形でき，$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ はすべてこの方程式を満たす．これは n 次方程式であり，n 個の複素数解をもつ．したがって，すべての α_k が相異なることから，$\alpha_0 = 1$ に注意すると，この方程式の解は

$$x = 1, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$$

よって，方程式 $x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 = 0$ の解は $x = \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ であるから，

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1$$

$$= (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_{n-1})$$

この式に $x = 1$ を代入し，絶対値をとると右辺が求める積を表すことから，求める積 N は n に等しい　□

私たちはこの定理に興味を持ち，さまざまな方面に拡張できないか考えた．

2　外接する場合

単位円に外接する正 n 角形のある 1 つの頂点から他の頂点に引いた $(n-1)$ 本の線分の長さの積 N' について考える．この場合も内接する場合と同様に，線分の積は n によって定まる値になると我々は予想した．ここで，内接する正 n 角形と外接する正 n 角形は相似であることを利用すると次の結果が得られる．

Theorem 2. 単位円に外接する正 n 角形のある 1 つの頂点から他の頂点に引いた線分の積 N' は

$$N' = n\left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}}\right)^{n-1} = n\cos^{1-n}\frac{\pi}{n}$$

Proof 2. 単位円に外接する正 n 角形と単位円に内接する正 n 角形の相似比は $1 : \cos\dfrac{\pi}{n}$ となる．内接する場合の $(n-1)$ 本の線分に対し，それぞれ $\cos\dfrac{\pi}{n}$ の逆数倍の線分が対応するため，求める N' は

$$N' = n(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}})^{n-1} = n\cos^{1-n}\frac{\pi}{n}$$

と表される．

3　線分の長さの 2 乗和

単位円上の任意の点から単位円に内接する正 n 角形の各頂点に引いた線分の長さの 2 乗和 S について考える．たとえば，単位円上の任意の点から単位円に内接する正 4 角形に引いた線分の長さの 2 乗和 S を計算すると，単位円上の点 P の座標を (p, q) として，正 4 角形の各頂点の座標が $(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)$ であることから，求める値 S は

$$\begin{aligned} S &= (p-1)^2 + q^2 + p^2 + (q-1)^2 \\ &\quad + (p+1)^2 + q^2 + p^2 + (q+1)^2 \\ &= 4p^2 + 4q^2 + 4 \end{aligned}$$

ここで，点 P は単位円上にあるから $p^2 + q^2 = 1$ である．したがって，

$$S = 4 + 4 = 8$$

また，単位円に正 8 角形が内接しているときも同様の計算を行うと，各頂点の座標が $(\pm 1, 0), (0, \pm 1), (\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$(複号任意) であるから，

$$\begin{aligned} S &= (p-1)^2 + q^2 + (p+1)^2 + q^2 \\ &\quad + p^2 + (q-1)^2 + p^2 + (q+1)^2 \\ &\quad + 2(p - \frac{1}{\sqrt{2}})^2 + 2(q - \frac{1}{\sqrt{2}})^2 \\ &\quad + 2(p + \frac{1}{\sqrt{2}})^2 + 2(q + \frac{1}{\sqrt{2}})^2 \\ &= 8p^2 + 8q^2 + 8 \\ &= 16 \end{aligned}$$

以上より，$n = 4$ のとき $S = 8 = 2 \times 4$，$n = 8$ のとき $S = 16 = 2 \times 8$ となることから，一般に単位円に内接する正 n 角形についても線分の長さの 2 乗和 S が $2n$ となることが予想される．

Theorem 3. 単位円上の任意の点 P から単位円に内接する正 n 角形の各頂点に引いた線分の長さの 2 乗和 S は $2n$ に等しい．

先に以下の **Lemma 1.** を示す．

Lemma 1. 2 以上の自然数 n に対し，

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2k\pi}{n} = 0$$
$$\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2k\pi}{n} = 0$$

Proof 3.

$$z = \sum_{k=1}^{n}(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n})$$

とおくと，

$$\begin{aligned} & z(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\{\cos\frac{2(k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{2(k+1)\pi}{n}\} \\ &= \sum_{k=2}^{n}(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}) \\ &\quad + \cos\frac{2(n+1)\pi}{n} + i\sin\frac{2(n+1)\pi}{n} \\ &= \sum_{k=1}^{n}(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}) = z \end{aligned}$$

であるから，

$$z(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} - 1) = 0$$

$\cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n} - 1 = 0$ となるのは，

$$\cos\frac{2\pi}{1} = 1 \text{ かつ } \sin\frac{2\pi}{n} = 0$$

のときであるが，$n \geq 2$ より不適．よって，$z = 0$ であるから，

$$\sum_{k=1}^{n}(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}) = 0$$
$$\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2k\pi}{n} = 0$$

したがって，

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2k\pi}{n} = 0$$
$$\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2k\pi}{n} = 0$$

□

Lemma 1. を用いて，**Theorem 3.** を示す．

Proof 4. 複素数平面上で，単位円に内接する正 n 角形の 1 つの頂点を 1 を表す点にとる．その点が表す複素数をα_0とし，反時計回りに他の頂点についても$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_{n-1}$とする．このとき，$0 \leq k \leq n-1$ なる整数 k を用いて，

$$\alpha_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

と表せる．$z = \cos\theta + i\sin\theta$として単位円上に点 $P(z)$ をとると，求める値 S は

$$\begin{aligned}
S &= |z-\alpha_0|^2 + |z-\alpha_1|^2 + \cdots + |z-\alpha_{n-1}|^2 \\
&= (\cos\theta - 1)^2 + \sin^2\theta \\
&\quad + (\cos\theta - \cos\frac{2\pi}{n})^2 + (\sin\theta - \sin\frac{2\pi}{n})^2 \\
&\quad \vdots \\
&\quad + (\cos\theta - \cos\frac{2(n-1)\pi}{n})^2 \\
&\qquad + (\sin\theta - \sin\frac{2(n-1)\pi}{n})^2 \\
&= 2n \\
&\quad - 2\cos\theta(\cos 0 + \cos\frac{2\pi}{n} + \cdots + \cos\frac{2(n-1)\pi}{n}) \\
&\quad - 2\sin\theta(\sin 0 + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{2(n-1)\pi}{n})
\end{aligned}$$

ここで，**Lemma 1.** より，これは 2n に等しい． □

よって，単位円上に任意の点を取った場合は線分の長さの 2 乗和 S は一定の値に決まることがわかる．では単位円上の正 n 角形の各頂点に線分を引く 1 点が単位円上にない場合はどうだろうか．たとえば点 P を原点にとって，正 n 角形の各頂点への線分の長さの 2 乗和 S を計算すると $\underbrace{1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2}_{n} = n$ になる．

ここで，点 P の原点からの距離を r として，線分の長さの 2 乗和 S の計算を試みると，以下の結果が得られる．

Theorem 4. 平面上の原点からの距離が r の点 P から，単位円に内接する正 n 角形の各頂点に引いた線分の長さの 2 乗和 S は $n(r^2+1)$ に等しい．

Proof 5. Proof .4 と同様に，$\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$を定義する．$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ として，複素数平面上に任意の点 $P(z)$ をとると，求める値 S は

$$\begin{aligned}
S &= |z-\alpha_0|^2 + |z-\alpha_1|^2 + \cdots + |z-\alpha_{n-1}|^2 \\
&= (r\cos\theta - 1)^2 + (r\sin\theta)^2 \\
&\quad + (r\cos\theta - \cos\frac{2\pi}{n})^2 + (r\sin\theta - \sin\frac{2\pi}{n})^2 \\
&\quad \vdots \\
&\quad + (r\cos\theta - \cos\frac{2(n-1)\pi}{n})^2 \\
&\qquad + (r\sin\theta - \sin\frac{2(n-1)\pi}{n})^2 \\
&= n(r^2+1) \\
&\quad - 2r\cos\theta(\cos 0 + \cos\frac{2\pi}{n} + \cdots + \cos\frac{2(n-1)\pi}{n}) \\
&\quad - 2r\sin\theta(\sin 0 + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{2(n-1)\pi}{n}) \\
&= n(r^2+1)
\end{aligned}$$

□

以上より，単位円に内接する正 n 角形に対して，同一平面上のある一点から引いた線分の長さの 2 乗和 S は n と原点からの距離 r によって定まることが分かった．また，$r=1$ とすることで **Theorem 3.** が成り立つことも確認できる．

この時点で，正 n 角形の各頂点に線分を引く 1 点を同一平面上の 1 点にした場合まで拡張して，線分の長さの 2 乗和 S を表すことができた．一方で，線分を引く 1 点と正 n 角形の各頂点の位置関係について考えると，正 n 角形の各頂点の原点からの距離が変化した場合，つまり正 n 角形が内接する円の半径が変化した場合でも，線分の長さの 2 乗和 S は変化するだろう．これまでは単位円に内接する場合のみを扱ってきたが，拡張として正 n 角形が内接する円の半径を R とした場合について考える．

たとえば，$R=0$ の場合は $S = nr^2$になると考えられるが，$R=1$ のときの値とは異なるので，R の値によっても線分の長さの 2 乗和 S は変化すると考えられる．

Theorem 5. 平面上の原点からの距離が r の点 P から，半径 R の円に内接する正 n 角形の各頂点に引いた線分の長さの 2 乗和 S は $n(r^2+R^2)$ に等しい．

Proof 6. 複素数平面上において，原点を中心とする半径 R の円に内接する正 n 角形の 1 つの頂点を，R を表す点にとる．その点が表す複素数をα_0とし，反時計回りに他の頂点についても$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_{n-1}$とす

る．このとき，$0 \le k \le n-1$ なる整数 k を用いて，

$$\alpha_k = R(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n})$$

と表せる．$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ として複素数平面上に点 $P(z)$ をとると，求める値 S は

$$\begin{aligned}
S &= |z-\alpha_0|^2 + |z-\alpha_1|^2 + \cdots + |z-\alpha_{n-1}|^2 \\
&= (r\cos\theta - R)^2 + (r\sin\theta)^2 \\
&\quad + (r\cos\theta - R\cos\frac{2\pi}{n})^2 + (r\sin\theta - R\sin\frac{2\pi}{n})^2 \\
&\quad \vdots \\
&\quad + (r\cos\theta - R\cos\frac{2(n-1)\pi}{n})^2 \\
&\qquad + (r\sin\theta - R\sin\frac{2(n-1)\pi}{n})^2 \\
&= n(r^2+R^2) \\
&\quad - 2rR\cos\theta(\cos 0 + \cos\frac{2\pi}{n} + \cdots + \cos\frac{2(n-1)\pi}{n}) \\
&\quad - 2rR\sin\theta(\sin 0 + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{2(n-1)\pi}{n})
\end{aligned}$$

ここで，**Lemma 1.** より，これは $n(r^2+R^2)$ に等しい．□

以上より，線分の長さの 2 乗和 S は n および線分を引く点と正 n 角形の各頂点の原点からの距離によって定まることが示された．

4　空間における線分の長さの 2 乗和

第 3 節では，線分の長さの 2 乗和 S は n の値，線分を引く点と正 n 角形の各頂点の原点からの距離によって定まることが示された．しかしまだ，線分を引く任意の点が同一平面上にあるという条件がある．では線分を引く点が同一平面上にない場合はどうなるのだろうか．

我々は，空間上の 1 点からの線分の長さの 2 乗和 S を計算するにあたり，空間上のある 1 点から正 n 角形の各頂点を含む平面に垂線を下ろし，三平方の定理を用いることで，**Theorem 5**. に帰着できるのではないかと考えた．

Theorem 6. 空間上で，半径 R の円周上で正 n 角形をなす n 個の頂点 $A_k(0 \le k \le n-1)$ に対して，原点 O からの距離が r である点 P から各頂点に引いた線分の長さの 2 乗和 S は $n(r^2+R^2)$ に等しい．

Proof 7. xy 平面を複素数平面とする xyz 空間において，xy 平面上で原点 O を中心とする半径 R の円周上で n 個の点 $A_k(\alpha_k)(0 \le k \le n-1)$ が正 n 角形をなしているとき，空間上の原点からの距離が r の点 P から xy 平面に下ろした垂線の足を点 $Q(w)$ とすると，$OQ = x$ として

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= R(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}) \\
w &= x(\cos\theta + i\sin\theta)
\end{aligned}$$

を用いて，

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=0}^{n-1} PA_k^2 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(PQ^2 + QA_k^2) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(OP^2 - OQ^2) + \sum_{k=0}^{n-1}|w-\alpha_k|^2 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(r^2 - x^2) \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n-1}|(x\cos\theta - R\cos\frac{2k\pi}{n}) \\
&\qquad + i(x\sin\theta - R\sin\frac{2k\pi}{n})|^2 \\
&= n(r^2-x^2) + n(x^2+R^2) \\
&\quad - 2xR\sum_{k=0}^{n-1}(\cos\theta\cos\frac{2k\pi}{n} + \sin\theta\sin\frac{2k\pi}{n}) \\
&= n(r^2+R^2) \\
&\quad - 2xR\sum_{k=0}^{n-1}(\cos\theta\cos\frac{2k\pi}{n} + \sin\theta\sin\frac{2k\pi}{n})
\end{aligned}$$

Lemma 1. よりこれは $n(r^2+R^2)$ に等しい．□

ここまでの議論で，同一円周上で、正 n 角形をなす n 個の頂点に対して空間上の一点から引いた線分の長さの 2 乗和 S について考えてきた．

このとき，S は n 個の頂点の原点からの距離によって決まるため，原点からの距離が等しいという条件があれば，n 個の頂点は同一円周上、つまり同一平面上に並ぶ必要はない．ただし，S が偏角θによらないことから，上の **Theorem 6**. は n 個の頂点が同一平面上で正 n 角形をなしていたことによって，頂点が均等に配置されていたために成り立つと考えられる．

以上から，「原点からの距離が等しく，n 個の頂点の対称性が保たれている」ということに注目して，3 次元への拡張として，v 個の頂点が同一球面上で正多面体をなす場合について同様に定理が成り立つものと予想し，計算を試みた．

Theorem 7. 原点を中心とする半径 R の球面上で正多面体をなす v 個の頂点 $A_k(0 \leq k \leq v-1)$ に対し，原点からの距離が r である点 P から各頂点に引いた線分の長さの 2 乗和 S は $v(r^2+R^2)$ に等しい.

先に以下の **Lemma 2**. を示す.

Lemma 2. 原点を中心とする正多面体の各頂点の x 座標の和, y 座標の和, z 座標の和はすべて 0 に等しい.

Proof 8. 原点を中心とする各正多面体の頂点の座標は，実数 k を用いて

正四面体は $(k,k,k),(k,-k,-k),(-k,k,-k),(-k,-k,k)$

正六面体は $(\pm k, \pm k, \pm k)$

正八面体は $(\pm k,0,0),(0,\pm k,0),(0,0,\pm k)$

正十二面体は $(\pm k, \pm k \pm k),(0,\pm\phi^{-1}k,\pm\phi k),(\pm\phi k,0,\pm\phi^{-1}k),(\pm\phi^{-1}k,\pm\phi k,0)$

正二十面体は $(\pm k,\pm\phi k,0),(0,\pm k,\pm\phi k),(\pm\phi k,0,\pm k)$

と表される．ただし複号任意で, $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ である．このとき，正 n 面体の各頂点の w 座標の和を $T_w(n)$ と表すこととすると,

$$
\begin{aligned}
&T_x(4)=T_y(4)=T_z(4)=k+k-k-k=0\\
&T_x(6)=T_y(6)=T_z(6)=4k-4k=0\\
&T_x(8)=T_y(8)=T_z(8)=k-k=0\\
&T_x(12)=T_y(12)=T_z(12)\\
&\quad =4k-4k+2\phi k-2\phi k+2\phi^{-1}k-2\phi^{-1}k=0\\
&T_x(20)=T_y(20)=T_z(20)\\
&\quad =2k-2k+2\phi k-2\phi k=0
\end{aligned}
$$

したがって，原点を中心とする正多面体の各頂点の x 座標の和, y 座標の和, z 座標の和はすべて 0 に等しい. □

この **Lemma 2.** を用いて，**Theorem 7.** を示す.

Proof 9. 空間上に原点からの距離が r の点 $P(x,y,z)$ をとる．また，原点を中心とする半径 R の球に内接する正多面体の v 個の頂点を, $0 \leq k \leq v-1$ なる整数 k を用いて $A_k(\alpha_{kx},\alpha_{ky},\alpha_{kz})$ と定める．このとき,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{v-1} PA_k^2\\
&=\sum_{k=0}^{v-1}\{(x-\alpha_{kx})^2+(y-\alpha_{ky})^2+(z-\alpha_{kz})^2\}\\
&=\sum_{k=0}^{v-1}(x^2+y^2+z^2)+\sum_{k=0}^{v-1}(\alpha_{kx}^2+\alpha_{ky}^2+\alpha_{kz}^2)\\
&\quad -2(x\sum_{k=0}^{v-1}\alpha_{kx}+y\sum_{k=0}^{v-1}\alpha_{ky}+\sum_{k=0}^{v-1}\alpha_{kz})\\
&=vr^2+vR^2-2(x\sum_{k=0}^{v-1}\alpha_{kx}+y\sum_{k=0}^{v-1}\alpha_{ky}+\sum_{k=0}^{v-1}\alpha_{kz})
\end{aligned}
$$

ここで，**Lemma 2**. より，原点を中心とする正多面体の各成分の座標の和はすべて 0 なので，これは $v(r^2+R^2)$ に等しい.

上の **Theorem 7**. から, 2 次元での正 n 角形の定理を 3 次元に拡張したとき, S は正多面体の頂点の数によって決まることが分かる.

5 平面上のある点から各頂点へ

Theorem 1. では，単位円に内接する正 n 角形の 1 つの頂点から他の $(n-1)$ 個の頂点に引いた線分の長さの積 N を考えたが，我々はこの線分を引く点を頂点以外でとったときも線分の長さの積 L について同様の定理が成り立つと予想した.

まず，単位円上にとったときを考える.

正 n 角形の 1 つの頂点に一致するように点をとった場合が **Theorem 1**. である.

次に，正 n 角形のとなりあう 2 頂点がなす弧の中点に点を取った場合について, $n=3,4,6$ の場合で実際に計算すると，その値がすべて 2 となった．同様に，弧を $1:2$ に内分する点の場合は$\sqrt{3}$，弧を $1:3$ に内分する場合は$\sqrt{2}$，弧を $1:5$ に内分する場合は 1 となることもわかった．なお, $1:4$ に内分する場合は値が求められなかった.

以上の結果から，頂点に一致する場合を除いて L は n の値に依存しないと考えられる．また，これらの点からの積が簡単な値であることから，ここに規則性があるのではないかと思われる.

ここで, $\sqrt{3},\sqrt{2},1$ という値に注目すると，これらはそれぞれ，単位円に内接する正 3 角形，正 4 角形（正方形)，正 6 角形の 1 辺の長さと値が一致していることがわかる．また，単位円の直径を正 2 角形と捉えれ

ば，その長さは 2 であるから，弧の中点（2 等分する点）からの積に一致する．さらに．弧を $1:4$ に内分する点（5 等分する点）の場合に値が求められなかったことも，正 5 角形の 1 辺の長さが$\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$という複雑な値であるからだったからとも考えられる．

これらのことから，我々は以下のような仮説を立てて，その証明を試みることにした．

Proposition 1. 単位円に内接する正 n 角形の隣り合う 2 頂点がなす弧を $p:q$ に内分する点から正 n 角形の各頂点にひいた線分の長さの積 L は単位円上の正$\dfrac{p+q}{p}$の 1 辺の長さに等しい．

ここでは，一般に $p:q$ の内分点を考えるため，正$\dfrac{p+q}{p}$角形と分数の形で定義する．

Definition 1. 自然数 n,m に対して，正$\dfrac{m}{n}$角形とはある一つの頂点から，n だけとなりにある正 m 角形の頂点に反時計回りに線分を引いていき，その操作を繰り返してはじめの頂点へ戻ってくるまでにできる図形である．

たとえば，弧を $2:3$ に内分する点の場合は正$\dfrac{5}{2}$角形を考えることになる．

Example 1. 正$\dfrac{5}{2}$角形は，以下のような図形を指す．

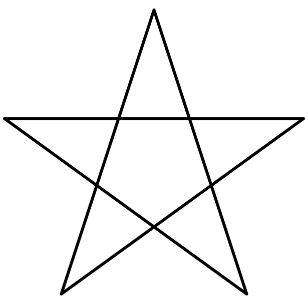

Fig 1. regular $\dfrac{5}{2}$-sided polygon

また，**Proposition 1**. を証明するために，以下の補題を示す．

Lemma 3. 正$\dfrac{p+q}{p}$角形の 1 辺の長さは $2\sin\dfrac{p}{p+q}\pi$で表される．

Proof 10. 単位円に内接する正 $(p+q)$ 角形の隣り合う 2 頂点 A_0, A_1について，原点 O とそれらがなす$\angle A_0OA_1$は$\dfrac{2\pi}{p+q}$に等しい．ここで，A_0から p だけ隣の頂点 A_pと原点 O，A_0がなす$\angle A_0OA_p$は $2\dfrac{p}{p+q}\pi$に等しい．ここで，単位円に内接する正 n 角形の中心から線分 A_0A_pに垂線を引き，その足を H とおくと A_0H の長さは $\sin\dfrac{p}{p+q}\pi$に等しく，またこれは正$\dfrac{p+q}{p}$角形の 1 辺の半分の長さにあたる．ゆえに，正$\dfrac{p+q}{p}$角形の 1 辺の長さは $2\sin\dfrac{p+q}{p}\pi$に等しい．

まず，単位円上のある点 $P(\cos\theta+i\sin\theta)$ から正 n 角形の各頂点に引いた線分の長さの積 L を一般に表すことを考える．

Theorem 8. 単位円上のある点 $P(\cos\theta+i\sin\theta)$ から，正 n 角形の各頂点に引いた線分の長さの積 L は$\sqrt{2-2\cos n\theta}$に等しい．

Proof 11. 複素数平面上の単位円に内接する正 n 角形の各頂点は，$0\le k\le n-1$ なる整数 k を用いて

$$\alpha_k=\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n}$$

と表せる．$z=\cos\theta+i\sin\theta$として，単位円上に点 $P(z)$ をとると，求める積 L は

$$\begin{aligned}L&=|z-\alpha_0||z-\alpha_1|\cdots|z-\alpha_{n-1}|\\&=|(z-\alpha_0)(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_{n-1})|\\&=|z^n-1|\\&=|(\cos n\theta+i\sin n\theta)-1|\\&=\sqrt{(\cos n\theta-1)^2+(\sin n\theta)^2}\\&=\sqrt{\cos^2 n\theta+\sin^2 n\theta+1-2\cos n\theta}\\&=\sqrt{2-2\cos n\theta}\end{aligned}$$

よって，L は$\sqrt{2-2\cos n\theta}$に等しい． □

この **Theorem 8**. 及び **Lemma 3**. を利用して **Proposition 1**. を示す．

Proof 12. **Theorem 8**. において，$\theta=\dfrac{p}{p+q}\cdot\dfrac{2\pi}{n}$のとき，

$$\begin{aligned}&\sqrt{2-2\cos n\theta}\\&=\sqrt{2-2\cos n\frac{p}{p+q}\frac{2\pi}{n}}\\&=\sqrt{2-2\cos\frac{p}{p+q}2\pi}\\&=\sqrt{2-2(1-2\sin^2\frac{p}{p+q}\pi)}\\&=\sqrt{4\sin^2\frac{p}{p+q}\pi}\\&=2\sin\frac{p}{p+q}\pi\end{aligned}$$

ここで，**Lemma 3**. より，$2\sin\dfrac{p}{p+q}\pi$は正$\dfrac{p+q}{p}$角形の１辺の長さを表すことから示された． □

この結果を受けて，我々は２乗和の定理と同様に線分の長さの積の定理についても点の位置関係を考えることで拡張が可能だと考えた．

まず，正 n 角形が単位円上にあることは変えずに線分を引く１点を平面上にとる．たとえば原点からの距離 r が 0 のとき，$L=1$ となる．

一般に，$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ として，単位円と同一平面上の点 $P(z)$ から単位円に内接する正 n 角形の各頂点に引いた線分の積は，次のように示される．

Theorem 9. $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ として, 点 $P(z)$ から単位円に内接する正 n 角形の各頂点に引いた線分の長さの積 L は

$$L=\sqrt{r^{2n}-2r^n\cos n\theta+1}$$

で表される．

Proof 13. **Proof 11**. と同様にα_kを定義する．複素数平面上の原点から距離 r の点 $P(z)$ から平面上の単位円に内接する正 n 角形の各頂点への線分の長さの積 L は

$$\begin{aligned}L&=|z-\alpha_0||z-\alpha_1|\cdots|z-\alpha_{n-1}|\\&=|z^n-1|\\&=|r^n(\cos\theta+i\sin\theta)^n-1|\\&=|r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)|\\&=\sqrt{(r^n\cos n\theta-1)^2+(r^n\sin n\theta)^2}\\&=\sqrt{r^{2n}-2r^n\cos n\theta+1}\end{aligned}$$

□

上の **Proof 13**. において，$r=1$ のとき $L=\sqrt{2-2\cos n\theta}$となり **Theorem 8**. に一致する．また，この積からα_0までの長さを除いて考えると **Theorem 1**. に一致する．**Theorem 9**. により，先ほどまで別々に定義されていた **Theorem .1** と **Theorem .8** を統一的に扱うことができるため，２次元での拡張に成功したといえる．

次に，２乗和と同様に，正 n 角形が内接する円の半径を変化させる．

Theorem 10. $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とし, 点 $P(z)$ から原点を中心とする半径 R の円に内接する正 n 角形の各頂点に線分を引いた時のその長さの積 L は,

$$L=\sqrt{r^{2n}-2r^nR^n\cos n\theta+R^{2n}}$$

Proof 14. 複素数平面上の原点を中心とする半径 R の円周上で正 n 角形をなす n 個の頂点 $A_k(0\le k\le n-1)$ の各頂点が表す複素数を

$$\alpha_k=R(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n})$$

とし，また $z=Rx(\cos\theta+i\sin\theta)$ として同一平面上の点 $P(z)$ から各頂点 A_kに引いた線分の長さの積 L は，**Theorem 9**. より

$$\begin{aligned}L=&\quad|z-\alpha_0||z-\alpha_1|\cdots|z-\alpha_{n-1}|\\&=R\sqrt{x^{2n}-2x^n\cos n\theta+1}\\&=\sqrt{R^{2n}x^{2n}-2R^{2n}x^n\cos n\theta+R^{2n}}\end{aligned}$$

ここで，$r=|z|=Rx$ とすると，

$$L=\sqrt{r^{2n}-2r^nR^n\cos n\theta+R^{2n}}$$

以上のことから，同一平面上において，平面上の任意の点から同一円周上にあり正 n 角形をなす n 個の頂点に引いた線分の積の値は，線分を引く点の原点からの距離 r と偏角θ, n と各頂点の原点からの距離 R によって決まることが分かる．

我々はここからさらなる拡張に向け，空間上の任意の点からの積や, ３次元における正多面体についても検討したが, ２乗和とは異なり，値に規則性が見つけられなかった．

恐らく，複素数平面を空間に拡張した三元数が代数的に不完全であるため，３次元の場合では **Theorem 1**. のような結果が得られず，また四次元の場合，四元数においては１の n 乗根が無限に存在し，四次元球上に規則性をもって並ばないために **Theorem 1**. のような結果が得られないものだと考えられる．これより大きい次元の場合についても同様である．

6 中線定理の拡張

初等幾何における一般的な定理として，以下の中線定理が知られている．

Theorem 11. 三角形 ABC において, M を BC の中点とすると,

$$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$$

Proof 15. 三角形 AMB に対して余弦定理を用いると

$$\cos\angle AMB = \frac{AM^2+BM^2-AB^2}{2AM\cdot BM}$$

同様に，三角形 AMC に対して余弦定理を用いると

$$\cos\angle AMC = \frac{AM^2+CM^2-AC^2}{2AM\cdot CM}$$

$\cos\angle AMB = -\cos\angle AMC$ と $BM = CM$ より，

$$AM^2+BM^2-AB^2 = -AM^2-BM^2+AC^2$$
$$AB^2+AC^2 = 2(AM^2+BM^2)$$

□

第 3 節で示した通り，**Theorem 5**. から同一円周上で正 n 角形をなす n 個の頂点 $A_k(0\le k\le n-1)$ に対し，任意の点 P から各頂点に引いた線分の 2 乗和は

$$\sum_{k=0}^{n-1} PA_k^2 = n(OP^2+OA_0^2)$$

と表される．

特に，$n=2$ のとき原点を O，2 頂点を A_0，A_1，線分を引く点を P とすれば

$$PA_0^2+PA_1^2 = 2(OP^2+OA_0^2)$$

と表すことができる．これは，三角形 PA_0A_1に対して点 O が辺 A_0A_1の中点であると考えると，これは **Theorem 11**. に一致する．

Theorem 5. の解釈で考えると，一般的に中線定理とは原点 O に対して同一円周上にある正 2 角形の 2 頂点 A_0，A_1に対して任意の点 P から線分 PA_0 と PA_1を引くと，$OA_0 = OA_1$より，

$$\begin{aligned} PA_0^2+PA_1^2 &= 2OP^2+OA_0^2+OA_1^2 \\ &= 2(OP^2+OA_0^2) \end{aligned}$$

の関係が成り立つということである．これを一般に正 n 角形の場合に発展させたものが **Theorem 5**. である．したがって，中線定理は我々が示した **Theorem 5**. において $n=2$ の特殊な場合と考えられ，これは中線定理の拡張に当たる．

また **Theorem 5**. は同一球面上で正多面体をなす v 個の頂点に対して 3 次元での拡張がなされているため **Theorem 5**. および中線定理と同様のものが 3 次元空間でも成り立つことが示されていることになる．

この中線定理の拡張について，**Theorem 5**. をもとにさらに考察する．

この定理において，任意の点から線分を引く n 個の頂点は正 n 角形をなすことが条件となっている．しかし，最終的な計算結果は原点からの距離のみがかかわるので，原点からの距離が等しいことで規則性が成り立つものと考えられる．もし原点 O が正 n 角形の外心であるために **Theorem 5**. が成り立つと考えたとき，いくつかの頂点を同一円周上で動かしても外心は変わらないため，同じ結果が得られるはずだが，これは成り立たないように思われる．ゆえに，これが成り立つのは原点 O が正 n 角形の外心であるからではなく，ともに原点 O に一致している正 n 角形の重心であるからだと捉えることで，**Theorem 5**. の説明ができる．

Theorem 12. 任意の n 角形に対し，各頂点を $A_k(0\le k\le n-1)$ とし，また位置ベクトル$\vec{g}$が

$$\vec{g} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1}\vec{a_k}}{n}$$

となるような点 G を重心と定義すると

$$\sum_{k=0}^{n-1} PA_k^2 = \sum_{k=0}^{n-1} GA_k^2 + nGP^2$$

が成り立つ．ただし，ある 3 点が同一直線上にある場合も n 角形であるとみなすものとする．

Proof 16. ベクトルを用いて証明する．

n 角形の各頂点 A_kの位置ベクトルを$\vec{a_k}$，点 P の位置ベクトルを$\vec{p}$とおくと，

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{n-1} GA_k^2 + nGP^2 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} |\vec{a_k}-\vec{g}|^2 + n|\vec{p}-\vec{g}|^2 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} |\vec{a_k}|^2 + n|\vec{g}|^2 - 2\vec{g}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\vec{a_k} \\ &\quad + n|\vec{g}|^2 + n|\vec{p}|^2 - 2n\vec{p}\cdot\vec{g} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} |\vec{a_k}-\vec{p}|^2 + 2n|\vec{g}| - 2\vec{g}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\vec{a_k} \end{aligned}$$

ここで，重心 G の定義より，

$$
\begin{aligned}
&2n|\vec{g}|^2 - 2\vec{g}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\vec{a_k} \\
&= \frac{2}{n}|\sum_{k=0}^{n-1}\vec{a_k}|^2 - \frac{2}{n}|\sum_{k=0}^{n-1}\vec{a_k}|^2 = 0
\end{aligned}
$$

ゆえに，

$$\sum_{k=0}^{n-1}|\vec{a_k}-\vec{p}|^2 = \sum_{k=0}^{n-1}PA_k^2$$

より，示された． □

したがって，n 角形の各頂点が正 n 角形をなすように位置するとき，この頂点は同一円周上にあり，重心 G と原点 O は一致するので，

$$\sum_{k=0}^{n-1}GA_k^2 = \sum_{k=0}^{n-1}OA_k^2 = nOA_0^2$$

となり，

$$\sum_{k=0}^{n-1}PA_k^2 = nOA_0^2 + nOP^2 = n(OA_0^2 + OP^2)$$

これが **Theorem .5** にあたる．

したがって，中線定理を含む **Theorem 5**. は n 角形の重心の性質における特殊な場合であると説明できる．また，正 n 角形の場合に 2 乗和の値が原点からの距離で決まったのは，正 n 角形において各頂点は同一円周上に配置され，その重心と外心が一致するためと考えられる．これが任意の自然数 n について成り立つのは，明確に外心が定まるという正 n 角形が持つ特有の性質によるといえる．

参考文献

[1] 数研出版．(2018)．改訂版 チャート式 基礎からの数学 Ⅲ.