

自由落下運動におけるエネルギー変換について

～空気抵抗のした仕事の証明～

岩手県立一関第一高等学校理数科3年
志賀裕太 片方優 山谷悠斗 遠藤大誠 千田純平 和田一希

要約

私たちは、自由落下運動におけるエネルギー変換について興味を持った。そして、その際に失われるエネルギー（変換ロス）が実際に空気抵抗によるものであるかどうかを検証しようと考えた。まず、自由落下運動時の物体の速度を測定し、理論値の速度との差から失われたエネルギー量を求めた。その後、レイノルズ数などを考慮して理論上の空気抵抗による仕事量を求め比較した。結果、数値に開きはあったものの同じオーダーの結果が得られ、失われたエネルギーの一部は空気抵抗によるものであると結論づけた。

<キーワード> レイノルズ数 空気抵抗係数 力学的エネルギー保存則

Energy Transformation on the Free-Fall Motion

～A Demonstration of Work of Air Resistance～

SHIGA Yuta KATAGATA Yu ENDO Taisei
WADA Kazuki YAMAYA Haruto CHIDA Junpei

ABSTRACT

We had an interest in how air resistance works and we wanted to try to prove it. In experiment of Free-fall motion, we measured velocity of iron ball and calculated amount of work from an error from theoretical value. After that, considering Reynolds number and so on, we calculated amount of work in the theory. As a result, although there was an error, we could get result of same order and concluded that the proof was successful.

<keywords> *Reynolds number Air resistance coefficient*
The law of the conservation of energy

1. はじめに

私たちの生活には、エネルギー変換を利用するものが多数存在する。その一例として、熱エネルギーを電気エネルギーに変換する火力発電などが挙げられる。この場合、すべての熱エネルギーが電気エネルギーに変換されることはなく、タービンなどの原動機を運動させるといった過程で、エネルギーの損失が生じている。私たちはそのような身近にある

エネルギー変換に興味を持ち、研究を行うことにした。

空気中の自由落下運動は、位置エネルギーが運動エネルギーに変換される。空気中では、空気抵抗が生じるため、真空中に比べて落下速度が減少する。そこで、私たちはその際に失われるエネルギー量を求め、理論上考えられる空気抵抗による仕事量と比較し、実際に一致するかどうか検証することを目的として研究を行う。

2. 鉄球が失ったエネルギー

本節では、鉄球の自由落下運動における速度測定器から、鉄球の運動エネルギーを求め、位置エネルギーとの差から失われたエネルギーを求める。

使用したものは、鉄球 1 個（半径 $1.30 \times 10^{-2} \text{ m}$ 、質量 $35.8 \times 10^{-2} \text{ kg}$ ）と、速度測定器（ピースピ V、ナリカ製）精度は、 0.01 m/s である。

落下する鉄球の速度を測定するため、速度測定器を鉛直方向に設置し、速度測定器の二つの赤外線センサーの中点を基準とし、鉛直方向に高さ 1.00 m の点から鉄球を自由落下させる (Fig.1)。

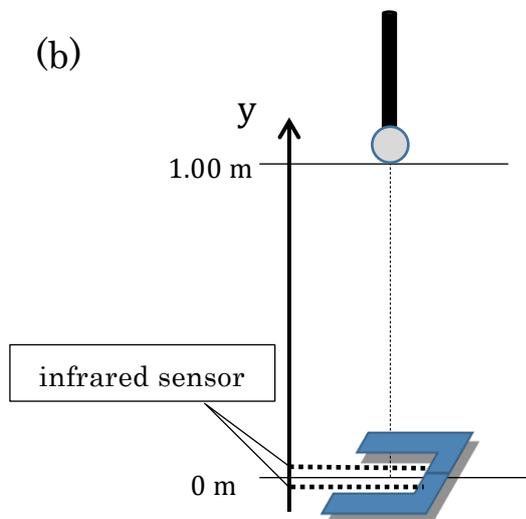
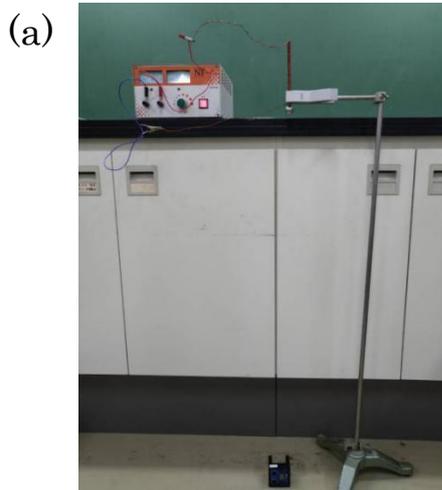


Fig.1 (a) Photo of the experiment
(b) Schematic diagram

Table 1 the numerical value

Number of trial [No.]	Velocity [m/s]	Number of trial [No.]	Velocity [m/s]
1	4.42	11	4.39
2	4.41	12	4.39
3	4.38	13	4.38
4	4.40	14	4.42
5	4.40	15	4.38
6	4.39	16	4.41
7	4.38	17	4.40
8	4.41	18	4.38
9	4.39	19	4.38
10	4.37	20	4.38

その際、高さ 1.00 m の点で電磁石と接触させ、電磁石への電流を切ることによって鉄球が自由落下できるようにする。本実験を 20 回試行する。

結果を Table 1 に示す。

これより、標準偏差は 0.01 m/s となることから、鉄球の平均速度 v_{obs} (m/s) は、

$$v_{obs} = 4.39 \pm 0.01 \text{ m/s} \quad (1)$$

となった。空気抵抗による影響を無視すると、力学的エネルギー保存則より、鉄球の落下する前の位置エネルギー $U[\text{J}]$ と落下後の運動エネルギー $E[\text{J}]$ が保存される。

重力加速度 g を 9.80 m/s^2 、落下距離 h を 1.00 m とすると、理論的に求められる 1.00 m での速度 v_{cal} (m/s) は、

$$v_{cal} = \sqrt{2gh} = 4.43 \text{ m/s} \quad \text{となる。これは実験}$$

で得られた平均速度 v_{obs} よりも大きく、その差が空気抵抗による鉄球の失ったエネルギー損失となると考えることができる。

以上より、鉄球が失ったエネルギー $\Delta E[\text{J}]$ は、

$$\begin{aligned} \Delta E[\text{J}] &= mgh - \frac{1}{2}mv_{obs}^2 \\ &= 5.93 \times 10^{-3} \text{ [J]} \end{aligned}$$

と求められた。

3. 空気抵抗がした仕事の導出

前節の鉄球のエネルギー損失 $\Delta E[J]$ は、空気抵抗による仕事と考えられる。本節では、10.0 cm ごとに速度を測定し、理論的に求めた空気抵抗係数の値を用いて、空気抵抗による仕事を求める。前節と同様に、高さ 1.00 m から鉄球を落下させる。その際、速度測定器を 10.0 cm ごとに設置し、10.0 cm ごとの鉄球の速度を測定する。これを 20 回試行する。(Fig.2)

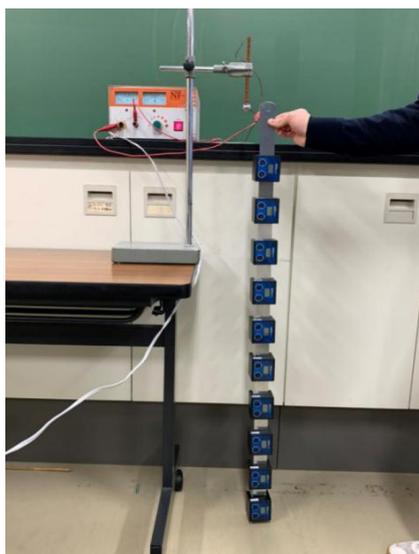


Fig.2 Photo of the experiment

結果を Table2 に示す。測定不能の場合は空欄とし、速度の平均値を求める際には、測定値のみを用いた。この結果から求めた 10.0 cm ごとの平均速度 v_{ave} ²を次の Table 3 に示す。

Table 3 the average velocity of every point

Height $h[m]$	Average velocity $v_{ave}[m/s]$
1.00	0
0.900	1.39
0.800	1.97
0.700	2.41
0.600	2.77
0.500	3.12
0.400	3.40
0.300	3.69
0.200	3.93
0.100	4.15
0.000	4.39

この球は加速度が変化しているため、その球に対する空気抵抗のした仕事を求めるのは難しい。ここでは鉄球は 0.100 m おきに等速直線運動をしているものとして考える。各区間の速度を隣り合った端点の速度の平均として考えると、Table 4 のようになる

Table 2 Velocity of the object on the free-fall motion

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1.00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.900	1.39	1.41	1.38	1.39	1.39	1.39	1.38	-	1.37	1.37	1.38	1.37	1.38	1.38	1.38	1.42	1.42	1.41	1.41	1.42
0.800	1.97	1.96	-	1.96	1.96	1.96	1.96	1.96	1.96	1.96	1.96	1.96	1.96	1.96	1.96	2.01	2.01	2.01	2.01	2.00
0.700	2.42	2.41	2.41	2.41	2.41	2.41	2.41	2.40	2.40	2.41	2.40	2.40	2.40	2.43	2.41	2.46	2.40	2.39	2.41	2.41
0.600	2.78	2.78	2.78	2.78	2.78	2.78	2.78	2.77	2.77	2.78	2.77	2.77	2.77	2.79	2.81	2.72	2.76	2.76	2.72	2.72
0.500	3.10	3.09	3.11	3.11	3.11	3.10	3.11	-	3.09	3.11	3.09	3.10	3.18	3.17	3.13	3.09	3.11	-	-	3.25
0.400	3.39	3.36	3.39	3.40	3.40	3.39	3.41	3.39	3.39	3.41	3.39	3.39	3.39	3.43	3.43	3.41	3.39	-	3.44	3.44
0.300	3.68	3.66	3.69	3.70	3.70	3.70	3.71	3.69	3.69	3.72	3.69	3.69	3.69	3.75	3.65	3.72	3.66	3.68	-	3.71
0.200	3.97	3.88	3.95	3.95	3.93	3.97	-	3.98	3.96	3.94	3.95	3.94	3.96	3.91	3.91	3.88	3.91	3.89	3.89	3.93
0.100	-	4.15	4.13	4.11	4.15	4.17	4.15	4.13	4.14	4.17	4.15	4.16	4.15	4.16	4.16	4.13	4.17	4.16	4.16	4.17

Table 4 Average velocity of each section

The height from standard h [m]	The average velocity v_{ave} [m/s]
1.00	0.696
0.900	
0.800	1.68
0.700	2.19
0.600	2.59
0.500	2.95
0.400	3.26
0.300	3.55
0.200	3.81
0.100	4.04
0.000	4.27

ここで空気抵抗力のした仕事 w_{all} [J] を求める。 w_{all} は 0.100 m ごとに空気抵抗力がした仕事を積分して得られる。付録より空気抵抗係数 k を $k = 1.41 \times 10^{-4}$ とし Table.4 の値を用いると、

$$\begin{aligned}
 w_{all} &= \sum_{i=1}^{10} (k v_{ave i}^2 h) \\
 &= 1.41 \times 10^{-4} \times 1.00 \times \sum_{i=1}^{10} (v_{ave i}^2) \\
 &= 1.35 \times 10^{-3} \text{ [J]}
 \end{aligned}$$

と求まる。この値は 2 節で求めた鉄球が失ったエネルギー ΔE [J] の約 23% となるものの、同じオーダーで求めることができた。今回の実験より、鉄球が失ったエネルギーの全てが空気抵抗によるものであることを示すことは難しいが、一部は空気抵抗によって説明できることは示された。

4. おわりに

本論文では、鉄球の自由落下に着目し、位置エネルギーが運動エネルギーに変換される際のエネルギーの損失量を求め、それが空気抵抗による仕事で説明できるかどうか実験で示すことを試みた。その結果、鉄球のエネルギーの損失量の約 23% を空気抵抗による仕事で説明できることが示された。しかし、数値には大きな開きが見られ、実験の精度や空気抵抗係数の値など、他の要因によって空気抵抗による仕事を正しく求められていない可能性がある。今後は、その差についてさ

らに検証していく必要がある。

参考文献

- 1) 寺島幸生ら：速度測定玩具”ピースピ”を用いた定量的な力学実験教材の開発
- 2) Oki：初心者のための航空力学講座，
<https://pigeon-poppo.com/reynoldsnumber/>
- 3) 国立天文台(2019)：理科年表，丸善出版，1192p

付録 ～空気抵抗係数 k の導出～

空気抵抗のした仕事量を求めるにあたって、流体力学の概念が必要となる。以下の思考においては全て以下の数値を利用する (Table

$m = 35.8 \times 10^{-2} \text{ kg}$: mass of iron ball
$g = 9.80163 \text{ m/s}^2$: gravitational acceleration at Iwate
$\pi = 3.14159$
$\mu = 1.822 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$: viscosity coefficient
$r = 1.30 \times 10^{-2} \text{ m}$: radius of iron ball
$\rho = 1.205 \text{ kg/m}$: density of the air
$s = 5.31 \times 10^{-4} \text{ m}$: area of projection

A)。

Table A Conditions of the experiment

物体は最終的に空気抵抗力と物体に働く重力がつりあう (Fig.A)。このときの速度を終端速度とし、 v_f と表す。

$$mg = k v_f^2 \quad (1)$$

が成り立つ。

Fig.A force balance



空気抵抗力は一般に抗力であるから、抗力 D [N] について考える。 D とは、物体が流れの方向の成分から受ける力のことを言う。自由落下における D は空気が鉛直方向に流れる際の物体が受ける力である。 D は以下の式で表される（ニュートンの抵抗法則）。

$$D = \frac{1}{2} C_D \rho v^2 s \quad (2)$$

(2)より v は C_D に依存する①。ここでの C_D は抗力係数のこと、 s は流れの方向から見た投影面積を表す。

C_D について考えるために、レイノルズ数 Re という値が必要となる。 Re とは流体の慣性力と粘性力の比で表される数のことを言う。流れにおいて、どれくらい粘性の影響があるのかを調べる尺度である。 Re は、以下の式で表される。

$$Re = \frac{\rho v L}{\mu} = \frac{2 \rho v r}{\mu} \quad (3)$$

よって、(3)より Re は v に依存する②。 $Re < 1$ であれば層流領域、 $1 < Re \leq 2975$ であれば遷移領域、 $Re > 2975$ であれば乱流領域と呼ばれる。

ここで、

$$\text{層流領域では } C_D = \frac{24}{Re}$$

$$\text{遷移領域では } C_D = \frac{24}{\sqrt{Re}}$$

$$\text{乱流領域では } C_D = 0.44$$

と表される。よって、 C_D は Re に依存する③。

①②③より v 、 C_D 、 Re は互いに依存しあっている。よって、条件を満たすか確認する必要がある。

(2)で $v = v_f$ のとき $D = mg$ となるから、

$$D = \frac{1}{2} C_D \rho v_f^2 s = mg \quad (4)$$

と表される。 v_f で考えると (1) より k を求めることができる。このことを利用する。

$Re < 1$ 、 $1 \leq Re < 2975$ の場合を仮定して計算すると、最終的に条件に適さず、 $Re > 2975$ のみ条件と一致することから、本実験における Re 数は 2975 より大きいことがわ

かる。(以下計算式)

$Re > 2975$ のとき

$C_D = 0.44$ を(2)に代入すると

$$D = \frac{1}{2} \times 0.44 \times \rho v^2 s \\ = 0.22 \rho \pi r^2 v^2$$

となる。(i)と同様に考えて

$$0.22 \rho \pi r^2 v_f^2 = mg$$

これを v_f の式にすると

$$v_f = \sqrt{\frac{mg}{0.22 \rho \pi r^2}}$$

最初に示した数値を代入して

$$v_f = \sqrt{\frac{35.8 \times 10^{-3} \times 9.80163}{0.22 \times 1.205 \times 3.14159 \times 1.69 \times 10^{-4}}} \\ = 4.99 \times 10 \text{ m/s}$$

よって Re は

$$Re = \frac{2 \times 1.205 \times 4.99 \times 10 \times 1.3 \times 10^{-2}}{1.822 \times 10^{-5}} \\ = 8.58 \times 10^4$$

これは $Re > 2975$ をみたす。

よって適する。

したがって、この球の $v_f = 4.99 \times 10 \text{ m/s}$

(1)を用いて k は

$$k = \frac{mg}{v_f^2} \\ = \frac{35.8 \times 10^{-2} \times 9.80}{(4.99 \times 10)^2} \\ = 1.41 \times 10^{-4}$$

と求めることができた。