整数の $(-N)$ 進法表記について

岩手県立一関第一高等学校理数科 2 年課題研究数学 A 班
後 藤 駿 樹　尾 形 紘 介　阿 部 直 路
若 槻 起太郎　佐々木 颯 汰　藤 村 朋 生

We use a positional numeration system for represent numbers. Now, most of the people all over the world use the decimal system. In the computer, the binary system is used. Generally, we can think of N-ary representation for positive integer N. But there is few description of N-ary representation for negative integer N.

We investigate N-ary representation for negative integer N, the posibility to represent any number, ways for perform four arithmetic operations, also N-mal (decimal) operations.

Moreover we invetigate repeating N-mal representation for negative N. We can extend the Midy's theorem of repeating decimal for repeating N-mal repeating for negative N.

[Keyword] N-ary representation for negative integer N, arithmetic operations, N-mal (decimal) operations, repeating decimals, Midy's Theorem

1 はじめに

1.1 10 進位取記数法について

私たちが日常生活にいて使用している記数法は，大きな数を表すために，百, 千, 万と大きな数になるたびに新しい記号を用意することなく，0, 1, ⋯ , 8, 9 の 10 個の数字だけを用いて, 数字の置かれている位置とその数字を合わせて数を表すという記数法であり，「10 個をひとまとめとする」という意味でこのような記数法のことを「10 進位取記数法」と呼んでいる.

一般の自然数 N に拡張して，任意の自然数 X は

$$X = a_n{\cdot}N^n + a_{n-1}{\cdot}N^{n-1} + \cdots + a_1{\cdot}N^1 + a_0{\cdot}N^0$$

と一意的に表すことができ，

$$X = a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_{1[N]}$$

とように表し，自然数 X の「N 進法表記」という.

基数となる N を自然数以外に拡張することについては，ドナルド・クヌースが複素数を用いることを考えている. (⟨1⟩ wikipedia 広義の記数法). また, Web 上「ハマグリの数学」(⟨2⟩ ハマグリの数学) では「マイナス 2 進数で数を数えなさい」というタイトルで，「ビルゲイツの入社試験」の問題の紹介として，$N = -2$ の場合の N 進法表記の加法の解説があった. そして最後に，減法について・乗法について・除法について・小数についても自分で研究してみようという記述があった.

そこで我々は，負の整数 N に対する，さらに一般化した N 進法表記について考えることにした.

我々が考えたのは，負の整数 N に対する N 進法表記（以後 $(-N)$ 進法表記という）について，(1)N 進法表記の可能性, (2)N 進法表記の一意性, (3)N 進表表記の 2 数の加法, (4) 減法, (5) 乗法, (6) 除法, (7) 小数表示をきちんと定式化することを目標に研究を始めた. さらにこの $(-N)$ 進法表記の応用例を探すことに重点をおいて取り組み, $(-N)$ 進法表記無限小数の極限値についての結果を得た. またその結果，数学 B 班が研究している「Midy の定理」(⟨3⟩ Midy の定理) を $(-N)$ 進法小数の場合に拡張することに成功した.

以下，自然数 N に対する N 進法表記について確認したのちに $(-N)$ 進法表記を考えるために，自然数に対する割り算の関係を負の整数についても拡張する. その後に上記 (1)〜(7) を順に述べていく.

2 N 進法表記について

2.1 自然数 N に対する N 進法表記

普通に使われている表記は 10 進法表記といい，10 個でひとかたまりを作っていくものであった. ここで 10 ではなくて，N 個でひとまとまりを作ることを考えることもできる.

N 進法表記を得るための計算を考えてみよう.

まず, X 個を N 個ずつのかたまりに分ける.

$X \div N$ の商 Q_1 がかたまりの個数，余り R_1 が残った半端を表す．

$$X = N \times Q_1 + R_0 \qquad (0)$$

できた Q_1 個を，また N 個ずつまとめて大きなかたまりを作る．

以下同様に繰り返すことによって，左右のような関係式 $(0) \cdots (k) \cdots$ ができる．

$$Q_1 = N \times Q_2 + R_1 \qquad (1)$$
$$Q_2 = N \times Q_3 + R_2 \qquad (2)$$
$$Q_3 = N \times Q_4 + R_3 \qquad (3)$$
$$\cdots \qquad \cdots$$
$$Q_k = N \times Q_{k+1} + R_k \qquad (k)$$
$$\cdots \qquad \cdots$$

式 (1) を式 (0) に代入すると

$$\begin{aligned} X &= N \times (N \times Q_2 + R_1) + R_0 \\ &= N^2 \times Q_2 + N \times R_1 + R_0 \end{aligned}$$

さらにこの式に式 (2) を代入して

$$\begin{aligned} X &= N^2 \times (N \times Q_3 + R_2) + N \times R_1 + R_0 \\ &= N^3 \times Q_3 + N^2 \times R_2 + N \times R_1 + R_0 \end{aligned}$$

同様にして

$$X = N^k \times Q_k + \ \cdots \ + N^2 \times R_2 + N \times R_1 + R_0$$

という関係式ができる．

この操作を繰り返していくと，できあがる大きなかたまりの個数 Q_k はどんどん少なくなっていく．N 個のかたまりが作れなくなるまでつづけることができる．そうなると，式 (n) で $Q_{n+1} = 0$ となり，最終的に

$$\begin{aligned} X = R_n \cdot N^n + R_{n-1} \cdot N^{n-1} + \ \cdots \\ \cdots \ + R_2 \cdot N^2 + R_1 \cdot N + R_0 \qquad (n) \end{aligned}$$

と表されることになる．

これを X の「 N 進法表記」という．

3　$(-N)$ 進法表記の可能性について

N 進法表記は，N として負の整数を考える事ができるのであろうか？

すべての整数 X に対して，負の整数 N に対する N 進法表記を考えるために，自然数 A，B に対する割り算 $A \div B$ の商 Q と余り R に対する関係式 $A = BQ + R$ を，負の整数に対しても拡張する．

3.1　割り算の関係式

3.1.1　割り算の関係式（正の整数 X に対して）

自然数 N を一つ定めたとき，$N < 2N < 3N < \ \cdots$ となる．このとき，任意の自然数 X に対して，

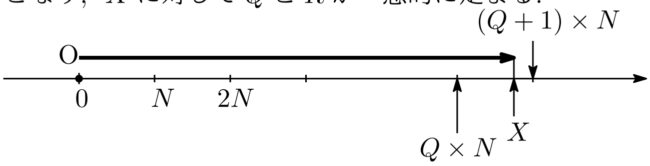
$$QN \leqq X < (Q+1)\,N$$

を満たす自然数 Q がただ一つ存在する．（アルキメデスの公理）

したがって，$R = (Q+1)\,N - X$ とおくと

$$X = QN + R \quad 0 \leqq R < N$$

となり，X に対して Q と R が一意的に定まる．



この Q を X を N で割ったときの商といい，R を余りという．

3.1.2　割り算の関係式（負の整数 X に対して）

負の整数 X に対してはどうであろうか．

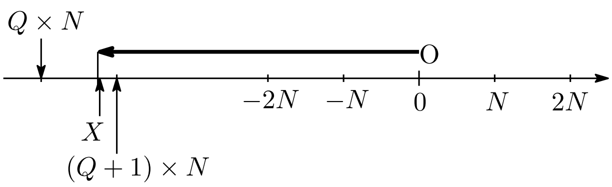
自然数 N を一つ定めているとき，

$$\cdots < -3N < -2N < -N < 0 < N < 2N \ \cdots$$

であるから，任意の負の整数 X に対して

$$QN \leqq X < (Q+1)\,N$$

を満たす負の整数 Q がただ一つ存在する．



したがって，$R = (Q+1)\,N - X$ とおくと

$$X = QN + R \quad 0 \leqq R < X$$

となり，X に対して Q と R が一意的に定まる．

この Q と R については別の考え方もできる．負の整数 X に対して $-X$ を考えると，これは正の整数であり，これについて

$$-X = Q' \times N + R' \quad 0 \leqq R' < -N$$

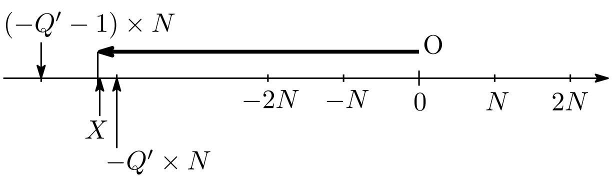
をみたす Q' と R' が一意的に定まる．（$Q' > 0$）である

両辺に -1 をかけて

$$X = -Q' \times N - R'$$

このようにして商 $-Q'$ とあまり $-R'$ が一意的に定まるけれども，このようにして定まる余りは負の整数となる．上の式は次のように考えると

$$X = (-Q'-1) \times N + (N - R')$$



これは　$Q = -Q' - 1$，$R = N - R'$　とすると，最初に考えた Q と R に一致する．

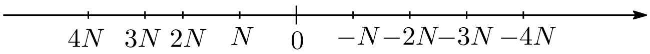
前者にように考えるのは，余り R が負にならないようにするときである，

3.1.3　割り算の関係式
（余りの絶対値が小さくなるように）

自然数 N を定めているとき，任意の整数 X に対し
$X = QN + R$
をみたす Q と R を考えるとき，
$-\frac{N}{2} < R \leqq \frac{N}{2}$
となるように，すなわち，(負の余りも許容して) 余りの絶対値が小さくなるように商と余りを決めることもある．

3.1.4　割り算の関係式（割る数が負のとき）

N が負の整数のときには，
$\cdots < 3N < 2N < N < 0 < -N < -2N < \ \cdots$



となっているので，上で考えたのと同様に，正の整数 X に対しても負の整数 X に対しても
$X = QN + R$
となり，X に対して Q と R が一意的に定まる．余りについては考える状況に応じて適宜適当な条件をつけて考える．

以下で，負の整数 N に対する N 進法表記を考えるときは，余りとしては
$X = QN + R \quad (\ 0 \leqq R < |N| \ )$
となるように考えることとする．

3.2　$(-N)$ 進法表記可能であること

定理 1. 任意の整数 N を定めたとき，任意の整数 X が N 進法表記可能である．すなわち，
$0 \leqq a_k < |N|$ をみたす整数 a_k（$k = 0, \ 1, \ \cdot \ , n$）が存在して
$X = a_n N^n + a_{n-1} N^{n-1} + \ \cdots \ + a_2 N^2 + a_1 N^1 + a_0$
と表せる．($N, \ X$ は正の整数でも負の整数でもよい．)

Proof. 整数 A と B に対して割り算 $A \div B$ を考えるとき，前節で述べたように，余り R が $0 \leqq R < N$ を満たすように決めることとして，A を B で割った商 Q と余り R を考える．このとき，
$A = BQ + R$
（Q は整数, R は $0 \leqq R < |B|$ を満たす整数）
という関係式を満たす．

このように考えたとき，X を N で割った商 q_0 と余り r_0 を取る．
$X = Nq_0 + r_0 \quad 0 \leqq r_0 < |N| \qquad (0)$
q_0 を N で割った商を q_1 と余り r_1 を取る．
（$|q_0| < |X|/N$）
$q_0 = Nq_1 + r_1 \quad 0 \leqq r_1 < |N| \qquad (1)$
式 (1) を式 (0) に代入すると
$X = N \left(Nq_1 + r_1 \right) = q_1 N^2 + r_1 N + r_0 \qquad (1^*)$
引き続き，q_1 を N で割った商を q_2 と余り r_2 を取る．
（$|q_1| < |q_o|/N$）
$q_1 = Nq_2 + r_2 \quad 0 \leqq r_2 < |N| \qquad (2)$
式 (2) を式 (*) に代入すると
$$X = \left(Nq_2 + r_2 \right) N^2 + r_1 N + r_0$$
$$= q_2 N^2 + r_2 N^2 + r_1 N + r_0 \qquad (2^*)$$
以下，
$X = q_k N^k + r_k r^k + \ \cdots \ + r_1 N + r_0 \qquad (k^*)$
が成り立っているときに
q_k を N で割った商 q_{k+1} と余り r_{k+1} を取る．
（ $0 \leqq r_{k+1} < |N| \quad |q_{k+1}| < |q_k|/N$）
$q_k = Nq_{k+1} + r_{k+1} \qquad (k)$
式 (k) を式 (k^*) に代入すると
$$X = \left(Nq_{k+1} + r_{k+1} \right) N^k + \ \cdots \ + r_1 N + r_0$$
$$= q^{k+1} N^{k+1} + r_{k+1} N^{k+1} + r_1 N + r_0 \ (k+1^*)$$

となる．ここで，q_k は自然数で，$\cdots < |q_k| < |q_{k-1}| < \cdots < |q_0|$ となるので，いつかは 0 になってしまう．n で初めて $q_n = 0$ になったとすれば
$X = r_n N^n + \ \cdots \ + r_1 N + r_0$
となり，整数 X の N 進法展開は可能である．　□

例 1. 負の整数 $X = -19$ を $N = -2$ 進法表記にしてみよう．

-2	) -19		
-2	) 10	$\cdots$	1
-2	) -5	$\cdots$	0
-2	) 3	$\cdots$	1
-2	) -1	$\cdots$	1
-2	) 1	$\cdots$	1
	0	$\cdots$	1

より
$$-19 = 1 \times (-2)^5 + 1 \times (-2)^4 + 1 \times (-2)^3$$
$$+1 \times (-2)^2 + 0 \times (-2)^2 + 1$$
ということになるので，
$-19_{[10]} = 111101_{[-2]}$
という (-2) 進法展開が得られた．
(-2) 進法展開によると，負の整数も表記できる．

以上の過程で現れる商を余りは一意的に定まるので，$(-N)$ 進法展開は一意的に定まることはわかっているのだが，一意性について次の節で示す．

4　$(-N)$ 進法表記の一意性について

定理 2.
$\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot N^k = 0$ であれば，
任意の k について $a_k = 0$ である．

Proof. $a_k \neq 0$ となる k が存在すると仮定する.
そのような k の中の最大のものを K とすると

$$a_K N^K = -\sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot N^k$$

この等式の右辺について

$$\begin{aligned}
\text{右辺} &= -\sum_{k=1}^{K-1} a_k N^k \leqq \sum_{k=1}^{K-1} |a_k||N|^k \\
&\leqq \sum_{k=1}^{K-1} (N-1)\cdot N^k = (N-1)\frac{N\left(N^{K-1}-1\right)}{N-1} \\
&= N^K - N
\end{aligned}$$

一方, 左辺は

$$\text{左辺} = a_K \cdot N^K \geqq N^K$$

これは矛盾である.
したがって, 任意の k について　$a_k = 0$ □

系 1.

$$X = \sum_{k=0}^{m} a_k \cdot N^k = \sum_{k=0}^{n} b_k \cdot N^k \text{ とすると}$$

$$n = m \quad \text{かつ}\quad \text{任意の } k \text{ について}\quad a_k = b_k$$

Proof. 一般性を失うことなく, $m \geqq n$ と仮定してよい.
このとき, $k \geqq n$ となる k については, $b_k = 0$ と定めることによって

$$\sum_{k=0}^{m} b_k \cdot N^k = \sum_{k=0}^{n} b_k \cdot N^k$$

としてよい. このとき,

$$\sum_{k=0}^{n} (a_k - b_k)\cdot N^k = 0$$

となるので, 定理より

任意の k $(0 \leqq k \leqq n)$ について　$a_k - b_k = 0$

特に, $k >$ n については　$a_k = 0$ なので

$$X = \sum_{k=0}^{m} a_k \cdot N^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot N^k$$

となり, $n = m$ である.
以上より, $n = m$ かつ　$a_k = b_k$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$
□

5　$(-N)$ 進法展開における加減乗除

5.1　加法

整数 N を基数とする N 進法表記による和算を考える.
n 桁で表記される $A = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot N^k$ と m 桁の $B = \sum_{k=0}^{m} b_k \cdot N^k$ に対して, A と B の和 $A + B$ を考える.
$n > m$ のときは, $k = m+1$ から $k = n$ までは $b_k = 0$ と決めれば,

$$B = \sum_{k=0}^{m} b_k \cdot N^k = \sum_{k=0}^{n} b_k \cdot N^k$$

と考えることができて

$$\begin{aligned}
A + B &= \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot N^k + \sum_{k=0}^{m} b_k \cdot N^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot N^k + \sum_{k=0}^{n} b_k \cdot N^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k)\cdot N^k
\end{aligned}$$

となり, 基本的には「各桁の数を加えればよい」のであるが, $a_k + b_k$ が N 以上になるときに「繰り上がり」が生じる. このことは, $n < m$ のときも同様に考えることができる.

※ $N < 0$ のときの注意

$N' = |N|$ とすると　$N = -N'$, $N' > 0$.

$A = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot (-N')^k$ と m 桁の $B = \sum_{k=0}^{m} b_k \cdot (-N')^k$ に対して, A と B の和 $A + B$ を考える. $n \neq m$ のときでも, 上に述べたように $n = m$ の場合として考えてよい,

$$\begin{aligned}
A + B &= \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot (-N')^k + \sum_{k=0}^{n} b_k \cdot (-N')^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k)\cdot (-N')^k
\end{aligned}$$

ここで, $a_k + b_k > |N|$ となるときには, $0 \leqq a_k + b_k - |N| < |N|$ であるから

$$\begin{aligned}
&(a_{k+1} + b_{k+1})(-N')^{k+1} + (a_k + b_k)(-N')^k \\
&= (a_{k+1} + b_{k+1})(-N')^{k+1} \\
&\qquad + \{N' + (a_k + b_k - N')\}(-N')^k \\
&= (a_{k+1} + b_{k+1})(-N')^{k+1} \\
&\qquad + N' \cdot (-N')^k + (a_k + b_k - N')(-N')^k \\
&= (a_{k+1} + b_{k+1})(-N')^{k+1} - \cdot(-N')^{k+1} \\
&\qquad + (a_k + b_k - N')(-N')^k \\
&= (a_{k+1} + b_{k+1} - 1)(-N')^{k+1} \\
&\qquad + (a_k + b_k - N'))(-N')^k
\end{aligned}$$

となって, 「繰り上がり」が起こるときには、一つ上の桁が 1 減るということが起こる.

例 2.

例えば, $A = 78_{[10]} = 231_{[-7]}$, $B = 234_{[10]} = 523_{[-7]}$ のときには $A + B = 312_{[10]} = 16054_{[-7]}$ の計算においては
$(-7)^2$ の位は 7 になるが, 繰り上がって, $(-7)^3$ の位の -1 になる.

$$-1 \times (-7)^3 = 1 \times (-7)^4 + 6 \times (-7)^3$$

つまり, $7 \times (-7)^2$ を繰り上がたいが,

$$\begin{array}{rccccc}
 & & & 2 & 3 & 1 \\
+) & & & 5 & 2 & 3 \\
\hline
 & & & 7 & 5 & 4 \\
 & & & \downarrow & & \\
 & & 7 + & 0 & 5 & 4 \\
 & & & \downarrow & & \\
 & & -1 & 0 & 5 & 4 \\
 & & \downarrow & & & \\
\hline
1 & & 6 & 0 & 5 & 4
\end{array}$$

$(-7)^3$ の桁からは 1 引けないので, もう一つ上の $(-7)^4$ の桁に繰り上げて, それを繰り下げた $(-7)^3$ の桁に $7 \times (-7)^3$ をつくり, ここから 1 引く.

5.2　減法

n 桁で表記される $A=\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot N^k$ と m 桁の $B=\sum_{k=0}^{m} b_k \cdot N^k$ に対して，A と B の和 $A+B$ を考える．

$n > m$ のときは，$k=m+1$ から $k=n$ までは $b_k=0$ と決めれば，

$$B=\sum_{k=0}^{m} b_k \cdot N^k=\sum_{k=0}^{n} b_k \cdot N^k$$

と考えることができて

$$\begin{aligned} A-B &= \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot N^k-\sum_{k=0}^{m} b_k \cdot N^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot N^k-\sum_{k=0}^{n} b_k \cdot N^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} (a_k-b_k) \cdot N^k \end{aligned}$$

となり，基本的には「各桁の差を取ればよい」のであるが，a_k-b_k が負の数になるときに「繰り下がり」が生じる．このことは，$n<m$ のときも同様に考えることができる．

$N<0$ について

$N'=|N|$ とすると　$N=-N'$，$N'>0$.

$A=\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot (-N')^k$ と m 桁の $B=\sum_{k=0}^{m} b_k \cdot (-N')^k$ に対して，A と B の和 $A-B$ を考える．$n \neq m$ のときでも，上に述べたように $n=m$ の場合として考えてよい，

$$\begin{aligned} A-B &= \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot (-N')^k-\sum_{k=0}^{n} b_k \cdot (-N')^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} (a_k-b_k) \cdot (-N')^k \end{aligned}$$

ここで，$a_k+b_k<0$ となるときには，$0 \leqq a_k-b_k+|N|<|N|$ であるから

$$\begin{aligned} &(a_{k+1}-b_{k+1})\,(-N')^{k+1}+(a_k-b_k)\,(-N')^k \\ &=(a_{k+1}-b_{k+1}+1)\,(-N')^{k+1}-(-N')^{k+1} \\ &\qquad +\{-N'+(a_k-b_k+N')\}\,(-N')^k \\ &=(a_{k+1}-b_{k+1}+1)\,(-N')^{k+1}-(-N')^{k+1} \\ &\qquad +(-N')^{k+1}+(a_k-b_k+N')\,(-N')^k \\ &=(a_{k+1}-b_{k+1}+1)\,(-N')^{k+1} \\ &\qquad +(a_k-b_k+N')\,(-N')^k \end{aligned}$$

となって，「繰り下がり」が起こるときには、一つ上の桁が1増えるということが起こる.

例 3.

例えば，$A=234_{[-7]}$，$B=115_{[-7]}$ のとき

$$A=2\times(-7)^2+3\times(-7)+4$$

$$B=1\times(-7)^2+1\times(-7)+5$$

の差 $A-B$ を計算すると

$$A-B=(2-1)\times(-7)^2+(3-1)\times(-7)+(4-5)$$

さて，ここで $(-7)^0$ の位の $(4-5)$ の部分は

$$4-5=-7+7+4-5=-7+6$$

となって，(-7) が隣の $(-7)^1$ の位に 1 加えられることになる.

これまでの 10 進法縦書き筆算の感覚でいうと，

4 から 5 は引けないので　隣の位から 1 繰り下げる

隣の位は $(-7)^1$ の位なので,

隣の位に 1 加えて $(-7)^0$ の位に 7 を加える.

したがって，$7+4$ から 5 を引くことになる.

A と B の $(-7)^2$ の位, $(-7)^1$ の位, $(-7)\,7^0$ の位をそろえて縦に並べておき，各位の数同士をひき算して該当の位に書く.

$(-7)^0$ の位は $4-5$ で引けないので,$(-7)^1$ の位から繰り下げて $+7$ とする．隣の $(-7)^1$ の位にとっては,

$$\begin{array}{rccc} & 2 & 3 & 4 \\ -\,) & 1 & 1 & 5 \\ \hline & & \downarrow & \downarrow \\ & 2 & 3+1 & 4+7 \\ -\,) & 1 & 1 & 5 \\ \hline & 1 & 3 & 6 \end{array}$$

1 の位に 7 分けたことになるので，7 減るが，これは -7 が 1 つ増えたと考える.

5.2.1　乗法

n 桁で表記される $A=\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot N^k$ と m 桁の $B=\sum_{k=0}^{m} b_k \cdot N^k$ に対して，A と B の積 $A\times B$ を考える.

$$\begin{aligned} A\times B &= \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot N^k \times \sum_{l=0}^{m} b_k \cdot N^l \\ &= \sum_{l=0}^{m} \left\{ \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot N^k \right) \times b_k \cdot N^l \right\} \\ &= \sum_{l=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} (a_k \times b_k) \cdot N^{K+l} \end{aligned}$$

例 4.

例えば，$A=16_{[-7]}$，$B=23_{[-7]}$ の積を考えてみよう.

$$A=16_{[-7]}=1\times(-7)^1+6$$

$$B=23_{[-7]}=2\times(-7)^1+3$$

なので

$$\begin{aligned} A\times B &= \Big(1\times(-7)^1+6\Big)\times\Big(2\times(-7)^1+3\Big) \\ &= \Big(1\times(-7)^1\Big)\times\Big(2\times(-7)^1\Big) \\ &\qquad +\Big(1\times(-7)^1\Big)\times 3 \\ &\qquad\qquad +6\times\Big(2\times(-7)^1\Big) \\ &\qquad\qquad\qquad +6\times 3 \\ &= (1\times 2)\times(-7)^2+(1\times 3)\times(-7) \\ &\qquad +(2\times 6)\times(-7)+6\times 3 \end{aligned}$$

ここで,

$$2\times 6 = 12 = (-1)\times(-7)+5$$
$$6\times 3 = 18 = (-2)\times(-7)+4$$

なので

$$\begin{aligned}&=(1\times 2)\times(-7)^2\\&\qquad+(1\times 3)\times(-7)\\&\qquad\qquad+\left\{(-1)\times(-7)^2+5\times(-7)\right\}\\&\qquad\qquad\qquad+\left\{(-2)\times(-7)+4\right\}\\&=(2-1)\times(-7)^2+(3+5-2)\times(-7)+4\\&=1\times(-7)^2+6\times(-7)+4\end{aligned}$$

これを縦書筆算形式で書くと，かけられる数 $A=16_{[-7]}$ とかける数 $B=23_{[-7]}$ を一の位（$(-7)^0$ の位）を揃えてたてに並べて書く．

$$\begin{array}{r|ccc}
 & & 1 & 6\\
\times & & 2 & 3\\
\hline
 & & & 18\\
 & & & (2\times7+4)\\
 & & \downarrow & \downarrow\\
 & & -2 & 4\\
 & & 3 & \\
 & & 12 & \\
 & & (1\times7+5) & \\
 & \downarrow & \downarrow & \\
 & -1 & 5 & \\
 & 2 & & \\
\hline
 & 1 & 6 & 4
\end{array}$$

(a) かける数 B の 1 の位$=(-7)^0$ の位の 3 をかけられる数 A の 1 の位$=(-7)^0$ の位の 6 をかけて $3\times 6=18$．
$18=2\times 7+4$ なので，2×7 が繰り上がって 4 が残る．隣の桁は $(-7)^1$ の桁なので 7 が 2 つ繰り上がるということは -7 が -2 個繰り上がることなので，隣の桁に -2 と入れる．
(b) かける数 B の 1 の位$=(-7)^0$ の位の 3 をかけられる数 A の $(-7)^1$ の位の 1 をかけて $3\times 1=3$．
そこで 3 を $(-7)^1$ の位の位置に入れる．
(c) かける数 B の $(-7)^1$ の位の 2 をかけられる数 A の 1 の位$=(-7)^0$ の位の 6 をかけて $2\times 6=12$．
$12=1\times 7+5$ となるので，1×7 が繰り上がって 5 が残る．隣の桁は $(-7)^2$ の桁なので 7 が 1 つ繰り上がるということは -7 が -1 個繰り上がることになるので，隣の桁に -1 と入れる．
(d) かける数 B の $(-7)^1$ の位の 2 をかけられる数 A の $(-7)^1$ の位の 1 をかけて $2\times 1=2$．
そこで 2 を $(-7)^2$ の位の位置に入れる．

以上の (a)〜(d) の結果より，$(-7)^2$ の位に入っている -1 と 2 を加えて 1，$(-7)^1$ の位に入っている -2 と 3 と 5 を加えて 6, $(-7)^0$ の位にある数は 4 だけなので 4，これらの結果を各位の位置に書き入れて計算完了．

5.3　除法

n 桁で表記される $A=\sum_{k=0}^{n} a_k\cdot N^k$ と m 桁の $B=\sum_{k=0}^{m} b_k\cdot N^k$ に対して，割り算 $A\div B$ を考える．（$m<n$ とする）

二つの正の整数 A,B に対して，「$A\div B$」という計算は，$A=B\times Q+R$（$0\leqq R<B$）を満たすような商 Q と余り R を求める計算である．

$A=\sum_{k=0}^{n} a_k\cdot N^k=\sum_{k=0}^{m} a_k\cdot N^k\times N^{n-m}$ 簡単のため，A が 3 桁で B が 2 桁のときを考えるとき，

$$A=A_1N+A_2$$

と分解して考えたとき

$$A_1=B\times Q_1+R_1$$
$$R_1\times N+A_2=BQ_2+R_2$$

となれば,

$$\begin{aligned}A&=A_1N+A_2\\&=(BQ_1+R_1)\,N+A_2\\&=BQ_1N+(R_1N+A_2)=BQ_1N+BQ_2+R_2\\&=B\,(Q_1N+Q_2)+R_2\end{aligned}$$

となって，求める商は Q_1N+Q_2 で, 余りは R_2 となることがわかる．

割り算の筆算形式は，上に述べた計算をもとにしている．

$$\begin{array}{r|rr}
 & Q_1N & +Q_2\\
\hline
B\,) & A_1N & +A_2\\
 & BQ_1N & \\
\hline
 & R_1N & +A_2\\
 & & BQ_2\\
\hline
 & & R_2
\end{array}$$

例 5.

(1) たとえば $A=263_{[-7]}$, $B=21_{[-7]}$ に対して，$A\div B$ を考えてみよう．

$$A=2\times(-7)^2+6\times(-7)+3$$
$$B=2\times(-7)+1$$

であるから,

$$Q_1=1\times(-7)$$

として，$B\times Q_1$ を計算すると，一番上の桁の $2\times(-7)^2$ を作ることができる．

$$\begin{aligned}B\times Q_1&=(2\times(-7)+1)\times(1\times(-7))\\&=2\times(-7)^2+1\times(-7)\end{aligned}$$

$A=2\times(-7)^2+6\times(-7)+3$ なので，$B\times Q_1$ によって，$(-7)^2$ の項はなくすことができた．そこで $Q_2=2$ とすることにより，さらに A に近づけることができる．

$$B\times Q_2=(2\times(-7)+1)\times 2=4\times(-7)+2$$

以上より,

$$\begin{aligned}&A-(B\times Q_1+B\times Q_2)\\&=\Big(2\times(-7)^2+6\times(-7)+3\Big)\\&\qquad-\Big(2\times(-7)^2+1\times(-7)+4\times(-7)+2\Big)\\&=1\times(-7)+1\end{aligned}$$

以上より,

$Q = Q_1 + Q_2 = 1 \times (-7) + 2$
$R = 1 \times (-7) + 1$

上の計算を筆算形式で書いたものを左に示す.

(a) 「たて」

仮商 $Q_1 = 1 \times (-7)$ を考え $(-7)^1$ の位に 1 をたてる.

$$
\begin{array}{r|rrr}
 & & 1 & 2 \\ \hline
2\ 1 & 2 & 6 & 3 \\
 & 2 & 1 & \\ \hline
 & & 5 & 3 \\
 & & 4 & 2 \\ \hline
 & & 1 & 1
\end{array}
$$

(b) 「かけ」

仮商 Q_1 に B にかけた結果の $21_{[-7]}$ を下に書いて

(c) 「引き」

(b) の結果を割られる数 A の上位 2 桁部分から引く.

(d) 「おろす」

割られる数の残っている $(-7)^0$ の位の 3 を下ろして，$53_{[-7]}$.

これを割られる数として上記 (a)〜(d) を繰り返す.

この例は，(c)「引き」の段階で繰り下がりがなく「順調に」計算がすすむけれども・・・

(2) 次の例をみてみよう.

$A = 1515$, $B = 12$ のときの $A \div B$ を計算しよう.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & & 1 & 4 & 1 \\ \hline
1\ 2 & 1 & 5 & 2 & 5 \\
 & 1 & 2 & & \\ \hline
 & & 3 & 2 & \\
 & & 4 & 8 & \\ \hline
 & & & 1 & 5 \\
 & & & 1 & 2 \\ \hline
 & & & & 3
\end{array}
$$

$32 \div 12$ の計算では注意が必要である.

$$
\begin{array}{r|rr}
 & & 2 \\ \hline
1\ 2 & 3 & 2 \\
 & 2 & 4 \\ \hline
 & 2 & 5
\end{array}
$$

引き算の際に繰り下がりが起こる.

商として，もう少し大きな値を立てることができる.

$$
\begin{array}{rrr}
 & 3 & 2 \\
 & & \downarrow \\
 & 4 & 9 \\
-) & 2 & 4 \\ \hline
 & 2 & 5
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|rr}
 & & 4 \\ \hline
1\ 2 & 3 & 2 \\
 & 4 & 8 \\ \hline
 & & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrr}
 & 3 & 2 \\
 & & \downarrow \\
 & 4 & 9 \\
-) & 4 & 8 \\ \hline
 & & 1
\end{array}
$$

6 $(-N)$ 進小数

6.1 10 進小数について

一般に, 1 より小さい数を表すのに，10 進法表記であれば，次のような小数表記を用いる

$$0.a_1 a_2 a_3 \ \cdots \ a_n \ \cdots$$

$$= a_1 \times \frac{1}{10} + a_2 \times \frac{1}{100} + \ \cdots \ + a_n \times \frac{1}{10^n} + \ \cdots$$

$$= a_1 \times 10^{-1} + a_2 \times 10^{-2} + \ \cdots \ + a_n \times 10^{-n} + \ \cdots$$

6.2 $(-N)$ 進小数

N を正の整数とするとき,10 進小数をもとにして $(-N)$ 進小数を考える.

$$
\begin{array}{r|lllll}
 & 0. & q_1 & q_2 & q_3 & \\ \hline
n & 1 & & & & \\
 & n \times 0 & & & & \\ \hline
 & r_0 & r_0 \times (-N) & & & \\
 & & n \times q_1 & & & \\ \hline
 & & r_1 & r_1 \times (-N) & & \\
 & & & n \times q_2 & & \\ \hline
 & & & r_2 & r_2 \times (-N) & \\
 & & & & n \times q_3 & \\ \hline
 & & & & r_3 &
\end{array}
$$

10 進小数のときと同じようにして，$\dfrac{1}{n}$ の計算を考えてみましょう．$1 \div n$ を計算していく.

$$1 = n \times 0 + r_0 \quad (\quad r_0 = 1 \quad) \qquad \cdots (0)$$

次に上の計算の余り r_0 に $(-N)$ をかけて，$r_0 \times (-N) \div n$ を計算する．3.1 節では，負の数の割り算を考えた．ここでは，割られる数が負の数 $r_0 \times (-N)$ なので，商を q_1 は負の数にとり 余りを r_1 は 0 以上の数になるようにする.

$$r_0 \times (-N) = n \times q_1 + r_1 \qquad \cdots (1)$$

となる.

以下同様に余りに $(-N)$ をかけて同様の計算を進める.

$$r_1 \times (-N) = n \times q_2 + r_2 \qquad \cdots (2)$$
$$r_2 \times (-N) = n \times q_3 + r_3 \qquad \cdots (3)$$
$$r_3 \times (-N) = n \times q_4 + r_4 \qquad \cdots (4)$$
$$r_4 \times (-N) = n \times q_5 + r_5 \qquad \cdots (5)$$
$$r_5 \times (-N) = n \times q_6 + r_6 \qquad \cdots (6)$$

式 (0) の両辺に $(-N)$ をかけて

$$1 \times (-N) = n \times 0 \times (-N) + r_0 \times (-N)$$

余り r_0 の $(-N)$ 倍のところに式 (1) を代入して

$$1 \times (-N)^1 = n \times 0 \times (-N) + (n \times q_1 + r_1)$$
$$= n \times (0 \times (-N) + q_1) + r_1 \qquad \cdots (1')$$

式 (1') の両辺に $(-N)$ をかけて

$$1 \times (-N)^2 = n \times \Big(0 \times (-N)^1 + q_1 + r_1\Big) \times (-N)$$
$$= n \times \Big(0 \times (-N)^1 + q_1\Big) \times (-N) + r_1 \times (-N)$$

余り r_1 の $(-N)$ 倍のところに式 (2) を代入して

$$1 \times (-N)^2 = n \times \Big(0 \times (-N)^2 + q_1 \times (-N)\Big) + (n \times q_2 + r_2)$$
$$= n \times \Big(0 \times (-N)^2 + q_1 \times (-N) + q_2\Big) + r_2$$

以下同様にして,

$$1 \times (-N)^6 = n \times \Big(0 \times (-N)^6 + q_1 \times (-N)^5 + q_2 \times (-N)^4 + q_3 \times (-N)^3 + q_4 \times (-N)^2 + q_5 \times (-N) + q_6\Big) + r_6$$

両辺を $(-N)^6$ で割って

$$
\begin{aligned}
1 = n \times \Big(&0\times(-N)^0 + q_1\times(-N)^{-1} + q_2\times(-N)^{-2}\\
&+q_3\times(-N)^{-3} + q_4\times(-N)^{-4} + q_5\times(-N)^{-5}\\
&+q_6\times(-N)^{-6}\Big) + r_6\times 10^{-6}
\end{aligned}
$$

この式の $(\quad)$ の中が $1\div n$ の商であり，$\dfrac{1}{n}$ の小数展開になっている．

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n} &= 0.\ q_1\ q_2\ q_3\ q_4\ q_5\ q_6\ \ \cdots_{[-N]}\\
&= 0\times(-N)^0 + q_1\times(-N)^{-1} + q_2\times(-N)^{-2}\\
&\quad +q_3\times(-N)^{-3} + q_4\times(-N)^{-4} + q_5\times(-N)^{-5}\\
&\quad +q_6\times(-N)^{-6} + \cdots
\end{aligned}
$$

6.3 例

$\dfrac{1}{7}$ を (-10) 進法による小数表示で表そう．

$$A = BQ + R \qquad 0 \leqq R < 10$$

-10 進法における小数の各桁は 0 以上とするので，商 Q が正になるように，余りは負となるような計算をした方がよい．

$$
\begin{array}{r|llll}
 & 1. & 9 & 5 & 8\\
\hline
7\ ) & 1 & & & \\
 & 7 & & & \\
\hline
 & -6 & 60 & & \\
 & & 63 & & \\
\hline
 & & -3 & 30 & \\
 & & & 35 & \\
\hline
 & & & -5 & 50\\
 & & & & 56\\
\hline
 & & & & -6
\end{array}
$$

この筆算では以下のように計算が行われている。

$$
\begin{aligned}
&1 = 7\times 1 + (-6)\\
&-6\times(-10) = 7\times 9 + (-3)\\
&-3\times(-10) = 7\times 5 + (-5)\\
&-5\times(-10) = 7\times 8 + (-6)\\
&\cdots
\end{aligned}
$$

よって，$\dfrac{1}{7} = 1.958958958\cdots_{[-10]}$

これを普通の 10 進小数に変換しよう．

偶数乗のところは

$$(-10)^{2k} = 10^{2k}$$

になり，奇数乗のところは

$$(-10)^{2k-1} = -10^{2k-1}$$

となる．したがって，

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{7} &= 1.958958958\ \ \cdots\ \ {}_{[-10]}\\
&= 1\times(-10)^0 + 9\times(-10)^{-1} + 5\times(-10)^{-2}\\
&\quad +8\times(-10)^{-3} + 9\times(-10)^{-4} + 5\times(-10)^{-5}\\
&\quad +8\times(-10)^{-6} + 9\times(-10)^{-7}\\
&\quad +5\times(-10)^{-8} + 8\times(-10)^{-9}\ \ \cdots\\
&= 1\times 10^0 - 9\times 10^{-1} + 5\times 10^{-2}\\
&\quad -8\times 10^{-3} + 9\times 10^{-4} - 5\times 10^{-5}\\
&\quad +8\times 10^{-6} - 9\times 10^{-7} + 5\times 10^{-8}\\
&\quad -8\times 10^{-9} +\ \ \cdots\\
&= 0\times 10^0 + 10\times 10^{-1} - 9\times 10^{-1}\\
&\quad +4\times 10^{-2} + 10\times 10^{-2} - 8\times 10^{-3}\\
&\quad +8\times 10^{-4} + 10\times 10^{-5} - 5\times 10^{-5}\\
&\quad +7\times 10^{-6} + 10\times 10^{-7}\\
&\quad -9\times 10^{-7} + 4\times 10^{-8}\\
&\quad +10\times 10^{-9} - 8\times 10^{-9}\ \ \cdots\\
&= 0\times 10^0 + 1\times 10^{-1} + 4\times 10^{-2} + 2\times 10^{-3}\\
&\quad +8\times 10^{-4} + 5\times 10^{-5} + 7\times 10^{-6}\\
&\quad +1\times 10^{-7} +\ \ \cdots\\
&= 0.142857\cdots_{[10]}
\end{aligned}
$$

7 N 進法循環小数の分数表記

循環小数 $0.\dot{a}_1a_2\ \cdots\ a_{k-1}\dot{a}_k$ は，$a_1a_2\ \cdots\ a_{k-1}a_k$ の数の並びが繰り返すもので，繰り返す部分の先頭と最後に $\dot{a}_1$ のように $\dot{}$ をつけて．循環部分を表しながら，これが無限に続くことを表している．

$$
\begin{aligned}
&0.\dot{a}_1a_2\ \cdots\ a_{k-1}\dot{a}_k\\
&= 0.a_1a_2\cdots a_{k-1}a_ka_1a_2\cdots a_{k-1}a_ka_1a_2\cdots a_{k-1}a_k\cdots
\end{aligned}
$$

「無限に続く」という言葉の意味は次のように正確に定義される．

k 個の数 $a_1, a_2,\ \cdots\ ,a_{k-1},a_k$（$0 \leqq a_i < |N|$）がこの順番に並んだ k 桁の整数を $[a_1a_2\ \cdots\ a_{k-1}a_k]$ とあらわすこととする．これは

$$
\begin{aligned}
&[a_1a_2\ \cdots\ a_{k-1}a_k]\\
&= a_1\cdot N^{k-1} + a_2\cdot N^{k-2} +\ \cdots\ + a_k\cdot N^0
\end{aligned}
$$

ということである．

$$
\begin{aligned}
&0.\dot{a}_1a_2\ \cdots\ a_{k-1}\dot{a}_k\\
&= 0.a_1a_2\cdots a_{k-1}a_ka_1\cdots a_{k-1}a_ka_1\cdots a_{k-1}a_k\cdots\\
&= 0.a_1a_2\ \cdots\ a_{k-1}a_k + 0.\underbrace{00\ \cdots\ 00}_{k\text{ 個}}a_1a_2\ \cdots\ a_{k-1}a_k\\
&\quad +0.\underbrace{00\ \cdots\ 00}_{k\text{ 個}}\underbrace{00\ \cdots\ 00}_{k\text{ 個}}a_1a_2\ \cdots\ a_{k-1}a_k\\
&\quad +0.\underbrace{00\ \cdots\ 00}_{k\text{ 個}}\underbrace{00\ \cdots\ 00}_{k\text{ 個}}\underbrace{00\ \cdots\ 00}_{k\text{ 個}}a_1a_2\ \cdots\ a_{k-1}a_k\\
&\quad +\ \cdots\\
&= \frac{a_1\cdot N^{k-1} + a_2\cdot N^{k-2} +\ \cdots\ a_k\cdot N^0}{N^k}\\
&\quad +\frac{a_1\cdot N^{k-1} + a_2\cdot N^{k-2} +\ \cdots\ a_k\cdot N^0}{N^{2k}}\\
&\quad +\frac{a_1\cdot N^{k-1} + a_2\cdot N^{k-2} +\ \cdots\ a_k\cdot N^0}{N^{3k}}\\
&\quad +\ \cdots\\
&= \frac{a_1\cdot N^{k-1} + a_2\cdot N^{k-2} +\ \cdots\ a_k\cdot N^0}{N^k}\\
&\quad \times\left(1 + \frac{1}{N^k} + \frac{1}{N^{2k}} +\ \ \ldots\right)\\
&= \frac{[a_1a_2\ \cdots\ a_{k-1}a_k]}{N^k}\left(1 + \frac{1}{N^k} + \frac{1}{N^{2k}} +\ \ \ldots\right)
\end{aligned}
$$

ここで，最右辺の $\left(\ \right)$ の中は，初項 1, 公比 $\dfrac{1}{N^k}$ の無限等比級数の和であり，公比がの絶対値は 1 より小なのでこの級数は収束しその和は

$$1+\frac{1}{N^k}+\frac{1}{N^{2k}}+\ \cdots\ =\frac{1}{1-\frac{1}{N^k}}=\frac{N^k}{N^k-1}$$

であるから，無限級数 $0.\dot{a_1}a_2\ \cdots\ a_{k-1}\dot{a_k}$ の和は

$$\begin{aligned} 0.\dot{a_1}a_2\ \cdots\ a_{k-1}\dot{a_k} &= \frac{1}{N^k-1}\cdot[a_1a_2\ \cdots\ a_{k-1}a_k] \\ &= \frac{1}{N^k-1}\sum_{i=1}^{k}N^{k-i}a_i \end{aligned}$$

例 6.

(1) 10 進法の循環小数 $0.\dot{1}23\dot{4}_{[10]}$ については,

$$0.\dot{1}23\dot{4}_{[10]}=\frac{[1234]}{10^4-1}=\frac{1234}{9999}$$

(2) 7 進法循環小数 $0.\dot{5}3\dot{1}_{[7]}$ については,

$$0.\dot{5}3\dot{1}_{[7]}=\frac{[531]}{7^3-1}$$

ここで, $[531]=5\cdot7^2+3\cdot7+1=5\cdot49+3\cdot7+1=267$

$7^3-1=343-1=342$

したがって,

$$0.\dot{5}3\dot{1}_{[7]}=[531]7^3-1=\frac{267}{342}=\frac{89}{114}$$

(3) (-3) 進法の循環小数 $0.\dot{1}\dot{2}$ については

$$0.\dot{1}\dot{2}_{[-3]}=\frac{[12]}{(-3)^3-1}$$

ここで, $[12]=1\cdot(-3)^1+2\cdot(-3)^0=-3+2=-1$

$(-3)^2-1=9-1=8$

したがって,

$$0.\dot{1}\dot{2}_{[-3]}=\frac{[12]}{(-3)^3-1}=\frac{-1}{8}=-\frac{1}{8}$$

8　級数展開による小数化

関数の級数展開の式

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ \cdot$$

を利用して，$m\div n$ の計算をせずに $\dfrac{m}{n}$ の N 進小数展開を得ることができる.

$1+x+x^2+\ \cdots$ は初項 1 公比 x の無限等比級数である. $|x|<1$ のときにはこの級数は収束し，その和は

$$1+x+x^2+\ \cdots\ =\frac{1}{1-x}$$

である.

同様に，$|x|<1$ であれば

$$\begin{aligned} &1-x+x^2-x^3+x^4\ \cdots \\ &=1+(-x)+(-x)^2+\ \cdots\ =\frac{1}{1+x} \end{aligned}$$

例 7.

(1) $$\frac{65}{99}=\frac{65}{10^2-1}=\frac{65}{10^2}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{1}{10}\right)^2}$$

$$=\frac{65}{10^2}\cdot\left\{1+\left(\frac{1}{10}\right)^2+\left(\frac{1}{10}\right)^4+\left(\frac{1}{10}\right)^6+\ \cdots\ \right\}$$

$$=\frac{65}{10^2}\cdot1.\dot{0}\dot{1}_{[10]}=0.\dot{6}\dot{5}_{[10]}$$

(2) $-\dfrac{217_{[10]}}{1001_{[10]}}$

$$\begin{aligned} 217_{[10]}&=3\cdot(-10)^2+9\cdot(-10)^1+7\cdot(-10)^0 \\ &=397_{[-10]} \end{aligned}$$

であり,

$$1001_{[10]}=10^3+1=-(-10)^3+1$$

したがって,

$$-\frac{217_{[10]}}{1001_{[10]}}=\frac{397_{[-10]}}{(-10)^3-1}=\frac{397_{[-10]}}{(-10)^3}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{10}\right)^3}$$

$$=\frac{397_{[-10]}}{(-10)^3}\cdot\left\{1+\left(-\frac{1}{10}\right)^3+\left(-\frac{1}{10}\right)^6+\ \cdots\ \right\}$$

$$=0.\dot{3}9\dot{7}_{[-10]}$$

9　$(-N)$ 進法における Midy の定理

循環小数についての興味深い性質がある.

定理 3 (Midy の定理)**.** 5 より大きい素数 p と，p とは互いに素である正の整数 m に対し，分数 $\dfrac{m}{p}$ が循環節の長さが偶数（$2d$ とする）の循環小数となるとき，循環節の最初の k 桁で表される数を A，最後の k 桁で表される数を B とすると

$$A+B=10^d-1=\underbrace{999\cdots9}_{d\ 個}$$

が成り立つ

本校 2019 年度課題研究数学 B 班は，この定理の条件を弱くして，より強い主張になる次の定理を証明した.

定理 4.

N は正の整数，n は素数とする．また，m は n とは互いに素であるとするとき，$N^d+1\equiv0\pmod n$ をみたす n より小さい整数 d が存在して，$2d$ より小さい l に対しては $N^l\not\equiv1\pmod n$ が成り立てば，分数 $\dfrac{m}{n}$ が循環節の長さが偶数（$2d$ とする）の循環小数となり，$1\leqq k\leqq d$ をみたす任意の整数 k について，循環節の第 k 番目の数を a，第 $d+k$ 番目の数を b とするとき

$$a+b=N-1$$

が成り立つ

負の整数 N についての N 進法により計算が確立されたことにより，この定理を負の整数 N について拡張する.

定理 5.

N は負の整数，n は素数とする．$N^d + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ をみたす n より小さい整数 d が存在して，$2d$ より小さい l に対しては $N^l \not\equiv 1 \pmod{n}$ が成り立てば，分数 $\dfrac{1}{n}$ が循環節の長さが偶数（$2d$ とする）の循環小数となり，$1 \leqq k \leqq d$ をみたす任意の整数 k について，循環節の第 k 番目の数を a，第 $d+k$ 番目の数を b とするとき

$$a + b = -(N-1)$$

が成り立つ

Proof. q_0，$r_0 = 1$ として

$$1 = n \times q_0 + r_0 \qquad \cdots (0)$$

$$r_0 \times N = n \times q_1 + r_1 \qquad \cdots (1)$$

ここで，$N < 0$ のときには，$q_1 > 0$ とするために $r_1 < 0$ となるように定める． 以下 q_0，q_1，$\cdots$,q_k，r_0, r_1，$\cdots$,r_k が定まったとき, r_1, r_2，$\cdots .r_k < 0$

$$r_k \times N = n \times q_{k+1} + r_{k+1} \qquad \cdots (k+1)$$

として q_{k+1}，r_{k+1} を順に決めていく．

条件より　$k = d$ になったときにはじめて $N^d \equiv -1 \pmod{n}$ となる．

このとき q_{d+1}，r_{d+1} については

$$r_d \times N = n \times q_{d+1} + r_{d+1}$$

として決めるが，$r_d = -1$ なので

$$-1 \times N = n \times (-q_1) + r_{d+1}$$

となり，$r_{d+1} \equiv -r_1$ であることがわかる．以下同様にして，

$$r_{d+k} \equiv -r_k \qquad (k = 1, 2, \ \cdots, \ d)$$

これより，$r_k + r_{d+k} = -n$ である．

このとき，式 (k) と式 $(k+d)$ より

$$r_k \times N = n \times a + r_k$$

$$r_{d+k} \times N = n \times b + r_{d+k}$$

これを辺々加えて

$$(r_k + r_{d+k}) \times N = n\,(a+b) + (r_k + r_{d+k})$$

$$-n \times N = n\,(a+b) - n$$

ゆえに　$a + b = N - 1$

□

例 8.

$$
\begin{array}{r|ccccccc}
 & 1. & 10 & 3 & 3 & 1 & 8 & 8 \\
\hline
37\ ) & 1 & 0 & & & & & \\
 & 37 & & & & & & \\
\cline{2-4}
 & -36 & 0 & & & & & \\
 & & 37 & 0 & & & & \\
\cline{3-5}
 & & 1 & 0 & 0 & & & \\
 & & 1 & 1 & 1 & & & \\
\cline{3-6}
 & & & -1 & 1 & 0 & & \\
 & & & 1 & 1 & 1 & & \\
\cline{4-6}
 & & & & -1 & 0 & & \\
 & & & & 3 & 7 & & \\
\cline{5-7}
 & & & & 2 & 7 & 0 & \\
 & & & & 2 & 9 & 6 & \\
\cline{5-8}
 & & & & & -2 & 6 & 0 \\
 & & & & & 2 & 9 & 6 \\
\cline{5-8}
 & & & & & & -3 & 6
\end{array}
$$

$\dfrac{1}{37} = 1.\dot{1}03318\dot{8}_{[-10]}$　となり，

$$10 + 1 = 11$$

$$3 + 8 = 11$$

ということで定理が成り立っている．

10　循環節の長さの変化

10 進循環小数を -10 進循環小数に変換したときに，循環節の長さが変化することに注目している．10 ではなくて N ではどうなるかなど，まだまだ調べてみなければいけないと考えているが，現在のところ，以下のような予想を持っている．

予想

$N = 10$ のときの循環節の長さが k のときの $N = -10$ のときの循環節の長さについて

● $k = 2m - 1$ のときには　循環節の長さは 2 倍になる

● $k = 2\,(2m-1)$ のときには　循環節の長さは半分になる

● $k = 4m$ のとき　循環節の長さは変化しない

11　考察

web-site〈1〉に紹介された「ビルゲイツの入社試験」の問題「-2 進法による加法を考える」に端を発したこの研究により，私たちは一般に $(-N)$ 進法について正確な定式化を行い，一般に知られる N 進法と同様に自由に加減乗除の計算ができるようになった．本研究と同時に進行していた課題研究数学 B 班の「Midy の定理」が示した循環小数の不思議な性質について，$(-N)$ 進法小数表示においても類似の性質を持つことを発見した．私たちが研究した $(-N)$ 進法の世界に豊かな数学の世界が広がっていることを確信することとなった．

同じ分数でも，10 進法と (-10) 進法では循環節の長さが変化する現象を見ると，「Midy の定理」に現れるような未知の現象がまだまだありそうである．

$(-N)$ 進法については研究しきれていないことが多く残されていると考えている．今後も研究を続けていきたい．

12　参考文献

〈1〉広義の記数法, ttps://ja.m.wikipedia.org/wiki/

〈2〉ハマグリの数学「マイナス 2 進法で数を数えなさい」, https://hamaguri.sakura.ne.jp/mainasu2.html

〈3〉E. Midy , De Quelques Propriétés des Nombres et des Fractions Décimales Périodiques, Nantes, 1836.