漸化式で表された数列の極限

岩手県立一関第一高等学校理数科３年
千葉理人　三浦康稔　佐藤伶　佐藤瑠一　高橋宥武　佐藤奨真

要約

私たちは、漸化式が　$a_1=1$，$a_2=1$，$a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$　で表されるフィボナッチ数列を学び興味を持った。そしてこの数列が黄金比、対数螺旋や花びらの枚数など自然界にも見られることを知った。これらは、どれも規則性があるように見えた。そこでフィボナッチ数列の漸化式に基づいて新な漸化式を設定したときにも、なにか規則性があるのではないかと考え調べた。すると、　$a_1=1$，$a_2=1$，$a_{n+2}=\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}$　と表したときにこの数列の収束値にある規則性を持つことが分かった。　＜フィボナッチ数列　漸化式　収束　累乗根＞

ABSTRACT

We learned and got interested in the recurrence formula. It is expressed in $a_1=1$, $a_2=1$, $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$ .This is called "Fibonacci numbers" .We found out that these progressions can be seen in the natural world such as golden ratio, logarithmic spiral and the number of petal. All of these were regular. We wondered if there was anything regular about a new recurrence formula. Therefore we set it based on the "Fibonacci numbers". When $a_1=1$, $a_2=1$, $a_{n+2}=\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}$ is expressed, it is found that the regularity at the convergent value of the this recurrence formula appears.

1. はじめに

フィボナッチ数列について

フィボナッチ数列(Fibonacci numbers)
はイタリアの数学者
レオナルド・フィボナッチ
にちなんで名付けられた数列である。

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, …
というような数列で，最初の二項は
$F_1=1$，$F_2=1$　となり，以降どの項もその直前の二項の和となる。

漸化式は

$$F_1=1,\ F_2=1,\ F_{n+2}=F_n+F_{n+1}$$

で定義され，一般項は，

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

で表される。

この漸化式中に現れる

$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$　は　$\phi \fallingdotseq 1.61803398874\cdots$　という値で黄金比という値で自然界にも多く利用されている。花びらの数や葉序などで成長を効率的に行うために用いられている。

性質としては，隣り合うフィッボナッチ数の比は ϕ に収束する

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\phi \quad となる$$

$$\lim_{n\to\infty}F_n=\infty$$　で、正の無限大に発散する。

ここで私たちは，フィボナッチ数列の漸化式について調べ，自分たちで漸化式を設定し極限値について調べた。

2、方法

Excel でフィボナッチ数列の漸化式を作り，初項と第２項を入力すると第 25 項くらいまで表示されるように設定する。

n→∞　のとき　F_n→∞　となるので，自分たちで収束するようにExcelで設定する。

3. 結果

漸化式を設定したところ，

$$a_{n+2}=\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}$$

と設定したときに収束値が規則的に変化することが分かった。

このとき　n→∞　のとき　a_n→∞　とはならずにある値に収束した。

さらに調べていくと

フィボナッチ数列を与える漸化式を変更して，初項や漸化式の項数を変えた類似した数列もあることが分かった。

例えば

直前の三項の和で各項が定まるような数列をトリボナッチ数列などと言い，

4項間漸化式，5項間漸化式，6項間漸化式…などと増やしていくと

それぞれテトラナッチ数列，ペンタナッチ数列，ヘキサナッチ数列，…などと名前が付いている。

さらにフィボナッチ数列の初項と第2項をF_1=2，F_2=1　に置き換えた数列をリュカ数列といい，

2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, …

というような数列になり

一般項は

$$L_n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

と表される。

次に

自分たちで設定した数列$\{a_n\}$について

証明などをしていく。

数列$\{a_n\}$について

$$a_1=1,\ a_2=1,\ a_{n+2}=\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}$$

で定める。

これらについて収束値を求める

<u>証明</u>

$a_n>0$　となることを示す

$a_n>0$…①　とする

数学的帰納法より自然数nに対して

n＝1　のとき　a_1=1　より①を満たす

n＝k　(k≧1)のとき　$a_k>0$　と仮定すると

n＝k+1　のとき，仮定より　$a_{k+1}>0$　となり，すべての自然数nに対して　$a_n>0$　となる。

■

<u>証明</u>

$\{a_n\}$が広義単調増加となることを示す。

$a_{n+1}-a_n≧0$　となることを示す

$a_{n+1}-a_n≧0$…①　とする

数学的帰納法より自然数nに対して

n＝1　のとき

$a_2-a_1=0$　より①を満たす

n＝2　のとき

$a_3-a_2=\sqrt{1}+\sqrt{1}-1=1>0$　より①を満たす

n＝k　(k≧2)　のとき

$a_{k+1}-a_k>0$と仮定すると

n＝k+1　のとき，

$$a_{k+2}-a_{k+1}=\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}-(\sqrt{a_{k-1}}+\sqrt{a_k})$$
$$=\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_{k-1}}$$

仮定より　$\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_{k-1}}>0$　となる。

よって，すべての自然数nに対して

$a_{n+1}-a_n≧0$　が成り立つ　■

a_nの取りうる値の範囲を示す

$a_{n+2} \geqq a_{n+1} \geqq a_n$　　∵①より

$a_{n+2}=\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}} \geqq a_n$

$\Leftrightarrow$　$\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_{n+1}} \geqq a_n$　となり、

$\Leftrightarrow$　$2\sqrt{a_{n+1}} \geqq a_n$　　両辺2乗して

$\Leftrightarrow$　$4a_n \geqq {a_n}^2$

$\Leftrightarrow$　$4 \geqq a_n$

これより、a_nの取りうる値の範囲は

$4 \geqq a_n \geqq 1$　　・・・(*)　　となる。

これらより$\{a_n\}$は上に有界で，広義単調増加の数列となる。

ここで，単調収束定理より$\{a_n\}$は収束値αを持つことになり

$a_{n+2}=\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}$より

$\Leftrightarrow \alpha=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\alpha}$

$\Leftrightarrow \alpha=2\sqrt{\alpha}$　　両辺2乗して

$\Leftrightarrow \alpha^2=4\alpha$

$\alpha=0,\ 4$　　$\alpha=0$は不適

よって$\alpha=4$となる

これらより数列$\{a_n\}$は

n→∞　のとき　$a_n \to 4$　となる

続いて，

$a_1=1,\ a_2=1,\ a_{n+2}=\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}$

をk項間に拡張したときを考える。

このときの数列を$\{a_n\}$と再び定義すると，

$a_1=1,\ a_2=1,\ a_3=1,\ \cdots,\ a_{k-1}=1,$

$a_{n+k-1}=\sqrt{a_{n+k-2}}+\sqrt{a_{n+k-3}}+\cdots+\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n}$

と表される。

数列$\{a_n\}$は帰納的に　$a_{n+k-1}>0$　となる

$\{a_n\}$が広義単調増加となることを示す…②

k＝3　のとき

$\sqrt{1}+\sqrt{1}-1=1>0$　より②を満たす

k=l　（l≧3）のとき

$a_{n+l-1}-a_{n+l-2} \geqq 0$

と仮定する

k=l+1のとき

$a_{n+l}=\sqrt{a_{n+k-1}}+\sqrt{a_{n+k-2}}+\cdots+\sqrt{a_{n+1}}$

$a_{n+k-1}=\sqrt{a_{n+k-2}}+\sqrt{a_{n+k-3}}+\cdots+\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n}$

$a_{n+l}-a_{n+k-1}=\sqrt{a_{n+k-1}}-\sqrt{a_n} \geqq 0$

$\because a_{n+l-1}-a_{n+l-2} \geqq 0$　$\Leftrightarrow$　$a_{n+l-1} \geqq a_{n+l-2}$

$\Leftrightarrow$　$a_{n+l-1} \geqq a_n$

これらよりk項間に拡張した時の$\{a_n\}$は広義単調増加の数列となる。　■

(*) をk項間に拡張し、同様に考えたとき，

$(k-1)^2 \geqq a_n \geqq 1$　が成立する。

拡張する前と同様に，単調収束定理より

n→∞　のとき　$a_n \to \beta$　となる。

よって

$\beta=\sqrt{\beta}+\sqrt{\beta}+\cdots+\sqrt{\beta}+\sqrt{\beta}$

ここで$\sqrt{\beta}$はk-1個

$\Leftrightarrow \beta=(k-1)\sqrt{\beta}$　　両辺2乗して

$\beta^2=\{(k-1)\sqrt{\beta}\}^2$

$=(k^2-2k+1)\beta$

整理して

$\beta=0,\ (k-1)^2$　　$\beta=0$は不適

これらより$\{a_n\}$はk項間に拡張した時，

$\beta=(k-1)^2$　に収束する

次にm乗根に拡張した時を考える

k項間m乗根に拡張してm→∞　のとき

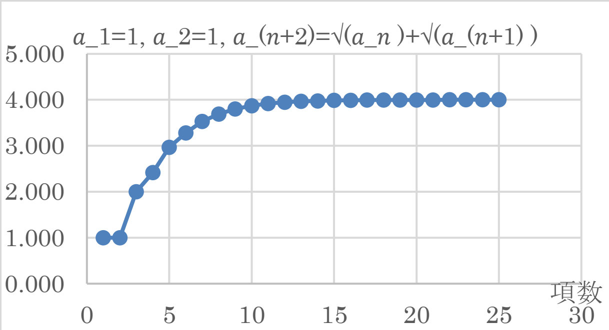
$\sqrt[m]{a_n} \to 1$　となり収束値が容易に判断できるため今回はk項間までの拡張にする。

4. 考察

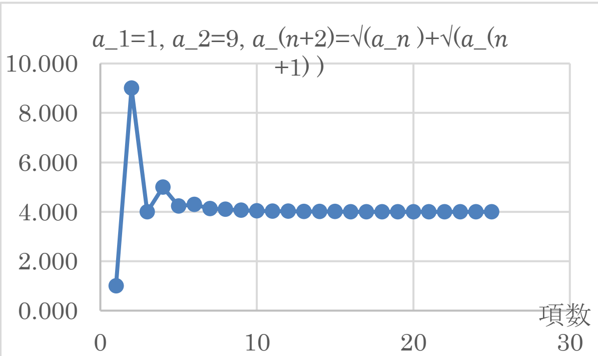
最後に初項と第2項を任意の自然数にしたと

きの考察をする。

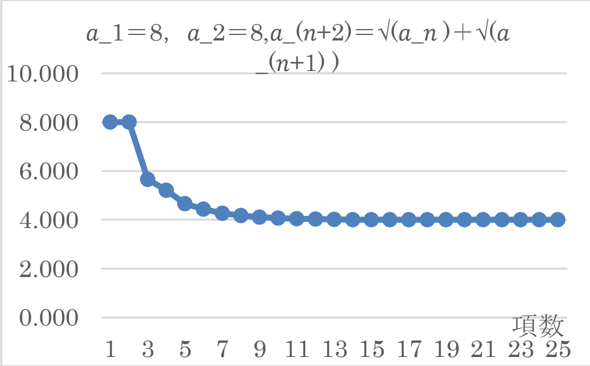
今回の課題研究ではここまでの証明はできなかったがある程度考察ができた。
まず,
a_1=1, a_2=1　のとき
数列$\{a_n\}$は広義単調増加しながら　$(k-1)^2$
に収束する



a_1=1, a_2＞$(k-1)^2$, a_2=9　のとき
数列$\{\mathrm{a_n}\}$は増加と減少をある程度繰り返しながら$(k-1)^2$に収束する。



a_1≧a_2≧$(k-1)^2$, a_1=8, a_2=8　のとき
数列$\{a_n\}$は広義単調減少しながら　$(k-1)^2$
に収束する。



発散するはずのフィボナッチ数列がルートをつけることによって、きれいに収束させることができた。

5. 今後の課題

　ここで数列$\{a_n\}$の一般項を求めようとしたが$\{a_n\}$は非線形な数列であるため一般項をうまく求めることが出来なかった。

　上記の広義単調増加しながら，増加と減少をある程度繰り返しながら，または広義単調減少しながらの境目となるような初項と第2項を求めることが出来たら一般項を求められそうだ。

6. 参考文献

　ウィキペディア　「フィボナッチ数」